BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Expliquer comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

Exercice 1

1. Soient A et B les ensembles suivants :

$$A = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + 3y + 2z = 0 \right\}$$

$$B = \left\{ (a + b - c, b - c, b, b + 2a) \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

   (a) Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels

   (b) Déterminer une base de A, de B puis de $A \cap B$.

2. Même question avec A l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 et B l'ensemble des matrices d'ordre 3 dont la somme de la diagonale (qu'on appelle la trace) vaut 0.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2 \ (E).$$

1. On suppose que f vérifie (E). On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre (E') sachant qu'il existe a un réel tel que $x \mapsto ax \exp(2x)$ soit solution de (E').
3. En déduire les solutions de (E).

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Théorème de la base incomplète (l'énoncer, pas le démontrer!!!)

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :

1. $y'' - 7y' + 12y = 0$,
2. $y'' + 12y = 0$,
3. $y'' - 7y' = 0$,
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$,
5. $y'' - 4y' + 3y = 0$,
6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$.

Exercice 2

On pose : $P = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0\}$ et :

$$Q = \text{ Vect } ((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 2), (2, 3, 0, 1)).$$

1. Démontrer que P est un espace vectoriel.
2. Déterminez une base et la dimension des espaces P et Q.
3. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur x, y, z et t pour que v appartienne à Q.
4. Expliciter $P \cap Q$.
5. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique couple (v_1, v_2) tel que v_1 appartienne à Q, v_2 appartienne à P et $v = v_1 + v_2$.
6. Recommencer l'exercice avec :

$$P = \left\{x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } x + y + z = x - t = 0\right\}$$

et :

$$Q = \text{ Vect } \left(1 + X + X^3, 1 + 2X^3, 2 + 3X + X^3\right).$$

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 7 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Donner la caractérisation des les familles libres, génératrices et des bases par le rang.

Exercice 1

Résoudre le système différentielle suivant d'inconnue y fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$y^{''} + 2y' + 2y = (x-1)e^{-x} \text{ et } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 1$$

sachant qu'il existe a et b deux réels tels que : $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ soit une solution de l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$y^{''} + 2y' + 2y = (x-1)e^{-x}.$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c+d = a+b+2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit $e_1 = (1,-1,-1,0)$ ainsi que :

$$e_{2,\lambda} = (1,\lambda,\lambda,-1), e_{3,\lambda} = (2,-1+\lambda,-2,-\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1+\lambda,-1-\lambda,0,1).$$

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$. λ désigne dans cet exercice un réel.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension
2. Déterminer la dimension de V_λ et en déduire une base de V_λ.
3. Donner des équations cartésiennes de V_{-1}.
4. Expliciter $U \cap V_{-1}$.
5. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.