

MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 7 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit α un réel strictement supérieur à 1. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exercice 1

Banque CCINP : On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
On pose alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}.$$

Donner un équivalent de (S_n) puis montrer que :

$$S_n = \ln(n) + C + o_{+\infty}(1).$$

2. Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \right).$$

MP Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 7 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Limite en $+\infty$ de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 + x^2}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- 3.(a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}.$$

Montrer que (S_n) converge puis montrer que :

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_e^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 7 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que $\int_x^{+\infty} \exp(-x^2) dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{\exp(-x^2)}{2x}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Pour tout entier naturel non nul p , on appelle n_p le plus petit entier naturel N tel que $H_N \geq p$. Donner un équivalent de (n_p) .

- 2.(a) Déterminer un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

- (b) Montrer qu'il existe un réel C et une fonction ε tendant vers 0 en $+\infty$ tel que :

$$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\ln^2(x)}{2} + C + \varepsilon(x).$$

- (c) Déterminer un équivalent de ε en $+\infty$.