

Définition et QC

Expliciter $\cos(\arcsin(x))$ et $\sin(\arccos(x))$ avec x dans... et en déduire $\arcsin'$ et $\arccos'$.

Exercice 1

1. Prouver de deux façons différentes que, pour tout x de $[-1, 1]$, on a :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

1. Calculer $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$, $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}$ et $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln(t)}}{t} dt$.
2. Calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1 + e^t} dt$, $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^t} dt$ et enfin $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))} dt$.

Définition et QC

trouver une primitive sur $[0, \pi]$ de $\theta \mapsto \frac{1}{\sin(\theta)}$ ne posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Exercice 1

1. Expliciter $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec x réel non nul.
2. Montrer que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout réel x et en déduire que pour tout $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, on a : $\arccos(1-x^2) = 2\arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$.

Exercice 2

1. Calculer $\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))dt}{t}$ et $\int_0^1 \frac{\sin(\arctan(t))dt}{1+t^2}$.
2. Calculer $\int_1^2 2^t dt$, $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$ et enfin $\int_1^{10} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$.

Définition et QC

Démontrer les propriétés classiques de $\ln$.

Exercice 1

Démontrer ces égalités :

$$2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

et en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

Exercice 2

1. On pose $I = \int_1^{10} \frac{1}{x \times (1 + x + x^2)} dx$. Calculer I après avoir trouvé des réels a , b et c tels que, pour tout réel non nul x , on ait :

$$\frac{1}{x \times (1 + x + x^2)} = \frac{a}{x} - \frac{bx + c}{1 + x + x^2}.$$

2. Calculer $\int_3^7 t \exp(-t^2) dt$, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(\arctan(t)) \times (1 + t^2)}} dt$ puis $\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$.