

EXERCICE 25 analyse

Énoncé exercice 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Corrigé exercice 25

1. $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.

Or $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or f_n est continue sur $[0, 1]$ donc f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. i) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

ii) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.

iii) $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCICE 29 analyse

Énoncé exercice 29

On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Corrigé exercice 29

1. Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1-x < 1$).

Donc, par critère d'équivalence, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(x, t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x, t) = o(\frac{1}{t^2})$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Par intégration par parties, justifiée ci-après $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$.

Le terme de variation possède des limites finies à ses bornes par croissances comparées, et est de valeur nulle, ce qui valide ce calcul et donne

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. i) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après la question 1.).

ii) $\forall t \in]0, +\infty[,$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et $\forall (x, t) \in]0, +\infty[^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)e^{-t}t^{x-1}$.

iii) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

iv) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

v) Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

En effet :

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\frac{a}{2}} \varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{a}{2}} |\ln t| = 0.$$

$$\text{Donc, au voisinage de } 0^+, \varphi_1(t) = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1 - \frac{a}{2} < 1$).

Donc, φ_1 est intégrable sur $]0, 1[$.

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0.$$

Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} dt$.

EXERCICE 30 analyse

Énoncé exercice 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Corrigé exercice 30

1. Soit $u : (x, t) \mapsto u(x, t)$ une fonction définie de $X \times I$ vers $\mathbb{C}$, avec X et I intervalles contenant au moins deux points de $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- i) $\forall x \in X, t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .

On pose alors $\forall x \in X, f(x) = \int_I u(x, t) dt$.

- ii) u admet une dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ sur $X \times I$ vérifiant :

- $\forall x \in X, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .

- $\forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur X .

- iii) il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x, t) \in X \times I, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction f est de classe C^1 sur X et $\forall x \in X, f'(x) = \int_I \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt$.

2. On pose $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.

- i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2}$.

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc, $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- ii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- $\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- iii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et comme elle est continue sur $[0, 1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

3. (a) On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

Procédons à une intégration par parties, justifiée par l'existence immédiate de limites finies aux bornes du terme de variation.

$$\int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

ce qui donne $f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = 0$.

Donc f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{x}{2}y = 0$.

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

$\frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série à terme positif divergente donc $S_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Pour être plus précis,

$$S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}}$$

or

$$\frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$$

et est donc le terme général d'une série convergente.

Ainsi $S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow C'$ d'où

$$S_n = \ln n + (\gamma + C') + o(1) = \ln n + C + o(1)$$

$\frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $\frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$ est absolument convergente. Par suite (S_n) converge

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente.

Par comparaison série intégrale $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ et on peut conclure comme annoncée.

n_p est bien défini car $H_n \rightarrow +\infty$.

La suite (n_p) est croissante et évidemment non majorée donc

$$n_p \rightarrow +\infty$$

Par définition de n_p , on a

$$H_{n_p} \geq p \geq H_{n_p-1}$$

Or

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc

$$\ln n_p + \gamma + o(1) \geq p \geq \ln(n_p - 1) + \gamma + o(1)$$

Puisque

$$\ln(n_p - 1) = \ln n_p + o(1)$$

on obtient

$$p = \ln n_p + \gamma + o(1)$$

puis

$$n_p = e^{n-\gamma+o(1)} \sim e^{n-\gamma}$$

Puisque f est continue en 0, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon \xrightarrow{0} 0$$

On a alors

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt + \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt$$

D'une part

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

et d'autre part

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right| \leq \max_{t \in [ax, bx]} |\varepsilon(t)| \ln \frac{b}{a} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

On peut conclure

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

Par intégration par parties

$$\int_e^x \frac{dt}{\ln t} = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_e^x + \int_e^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

Or

$$\frac{1}{(\ln t)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$$

et la fonction $t \mapsto 1/\ln(t)$ est positive non intégrable sur $[e, +\infty[$. On a donc

$$\int_e^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_e^x \frac{dt}{\ln t}\right)$$

et on en déduit

$$\int_e^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$$

a) On a

$$\frac{\ln(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

Puisque la fonction $t \mapsto \ln(t)/t$ est positive, non intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut affirmer

$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^x = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

b) On a

$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt - \frac{1}{2} (\ln x)^2 = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} - \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt$$

et donc

$$\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C + o(1)$$

avec la constante C égale à l'intégrale convergente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt$$

On peut montrer que cette constante vaut $\pi^2/12$ (via intégration terme à terme), mais c'est une autre histoire...

c) En fait

$$\varepsilon(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt$$

On a

$$\frac{1}{t} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est positive et intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut affirmer

$$\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} - \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$$