BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Citer la formule des probabilités totales, des probabilités composées et de Bayes.

Exercice 1

1. Calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$
2. Calculer $\int_0^1 x \arctan(x) dx$.
3. Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ et $\int_0^1 \ln^2(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 2

Soit $p \in]0;1[$. Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Gösta Mittag-Leffler décide de jouer à un jeu de pile ou face selon la règle suivante : il effectue une succession de tirages (indépendant les uns des autres et ayant une probabilité p de retourner le résultat "pile"). S'il arrive un moment où il obtient deux " pile" de plus que de "face", alors il a gagné et peut rendre visite à Mme Nobel. Si en revanche il obtient deux " face" de plus que de "pile", alors il a perdu et doit désherber son jardin.

1. Montrer que si la partie se termine alors on a effectué un nombre pair de lancers.
2. A l'instant n (n entier naturel non nul), on note Δ_n la différence entre le nombre de piles obtenus et le nombre de faces. Ainsi, la partie se termine dès que ($\Delta_n = \pm 2$) a lieu. On note A_n l'événement : «La partie n'est pas terminée à l'issue du lancer n.» Décrire l'événement A_{2n} à l'aide des éléments $(\Delta_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n}$.
3. Pour n entier naturel non nul, Déterminer $P(A_{2n})$.
4. Quelle est la probabilité que Gösta passe finalement un dimanche agréable ?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Citer le théorème de majoration (les deux formes) et la proposition sur intégrales généralisées et équivalent.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))} dt$ et $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x) dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2

Deux joueurs A et B procèdent l'un après l'autre à une succession de lancers d'une même pièce, amenant pile avec la probabilité p avec $p \in]0;1[$. On pose $q = 1-p$. Le joueur A commence et il s'arrête dès qu'il obtient le premier pile. Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A. Le joueur B gagne s'il obtient au moins un pile, sinon c'est le joueur A qui gagne. On définit, pour tout entier naturel non nul n, A_n l'événement : " le joueur A effectue n lancers" et GA (resp. GB) l'événement : " le joueur A (resp. B) gagne".

1. Pour tout entier naturel non nul n, calculer $P(A_n)$. En déduire la probabilité que le joueur A ne s'arrête jamais d'effectuer des lancers.
2. Calculer $P(GB)$ et $P(GA)$. Le jeu est-il équitable ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Donner la nature des intégrales de Riemann.

Exercice 1

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est 0,5.

1. On lance le dé, on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
2. On relance le dé et on obtient un second 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?

Exercice 2

1. On pose $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt$ et $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt$.
   (a) Démontrer que $S = C$.
   (b) En déduire S et C.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}dt$.
2. Soit a un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$ est convergente.
   (b) Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$.
   (c) Montrer que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} + \int_a^1 \frac{\cos(x)-1}{x}dx + \int_a^1 \frac{dx}{x}$.
   (d) Déterminer un équivalent de $a \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx$ en 0.