BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Citer la formule des probabilités totales, des probabilités composées et de Bayes.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \exp(-x)\sin(x)dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)\exp(-|t|)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.

Pour tout entier naturel n non nul on note B_n l'événement « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches», et on note $u_n = P(B_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul :
$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$
2. Étudier les variations de la suite (u_n), puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que pour tout réel x positif, on a : $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, puis démontrer que la suite $\big(-\ln(u_n)\big)$ est convergente.
4. En déduire que $\ell > 0$.
5. Que peut-on en déduire sur la probabilité de l'évènement $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Citer le théorème de majoration (les deux formes) et la proposition sur intégrales généralisées et équivalent.

Exercice 1

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. Pour tout entier naturel non nul n, on note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit n un entier naturel non nul. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Exercice 2

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente puis, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x}dx$.
   (a) Montrer I_n est bien définie.
   (b) Montrer que $f : \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (c) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}dx$. Calculer J_n.
   (d) Exprimer I_n à l'aide de J_n et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n)$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 8 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

<u>COLLES DE MATHÉMATIQUES</u>

Mini question de cours

Donner la nature des intégrales de Riemann.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{\pi}^{0} \cos^2(t)dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t}dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3 \exp(3x)dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2

Des boules en nombre infini numérotées 1,2,... sont placées successivement (et indépendamment les unes des autres) dans trois boîtes.

1. Pour tout entier k supérieur à 2, on note A_k l'événement « Deux des trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la k-ième boule ».
   (a) Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$.
   (b) Interprétez.
2. Pour tout entier l supérieur à 3, on note B_l l'événement « Les trois boîtes sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la l-ième boule ».
   (a) Calculer $P_{A_k}(B_l)$ pour $k \geqslant 2$ et $l \geqslant 3$.
   (b) En déduire $P(B_l)$ puis $\displaystyle\sum_{l=3}^{+\infty} P(B_l)$.
   (c) Interprétez.