MP2I **Sujet 1** — Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 8 — cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Expliquer comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre un et démo : Résolution d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre un.

Exercice 1

1. Pour quels r dans $\mathbb{K}$ la fonction $x \mapsto \exp(rx)$ est-elle solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$?
2. On suppose que le discriminant de l'équation $X^2 + aX + b = 0$ est nul et on note r_0 la racine double. Montrer que $x \mapsto x\exp(r_0x)$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Exercice 2

1. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\right)$$

2. En déduire, à l'aide d'un changement de variable que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}dx.$$

3. Montrer de deux façons différentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}.$$

Indication : Utilisez le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$.

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 8 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Expliquer la méthode de la variation de la constante pour l'ordre un et démo : Variation de la constante pour l'ordre un.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$, $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$ et $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln(t)}}{t}dt$.

Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9 \ (E_1) \quad \text{et} \quad y'' - 2y' + 5y = \exp(x)\cos(2x) \ (E_2).$$
2. Discuter suivant les valeurs du réel m de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2my' + y = \exp(-x).$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :
$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \ (E).$$

MP2I **Sujet 3** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 8 | cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Intégration par parties et changement de variable et démo : Soient $r \in \mathbb{C}$, $(b, c) \in \mathbb{K}^2$ et (H) l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$.

- $x \mapsto \exp(rx)$ est une solution de (H) si et seulement si r est une racine du polynôme caractéristique de (H).
- $x \mapsto x\exp(rx)$ est une solution de (H) si r est une racine double du polynôme caractéristique de (H).

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt$ et enfin $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))}dt$.

Exercice 2

1. Résoudre l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + y = \sin(\lambda x) \quad (E_\lambda)$$
où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.
2. Discuter suivant les valeurs du réel m de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2my' + y = 0.$$
3. On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:
$$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2 \ (E).$$
   (a) On suppose que f vérifie (E). On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
   (b) Résoudre (E') sachant qu'il existe a, b et c trois réels tels que $x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de (E').
   (c) En déduire les solutions de (E).

MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 8 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Donner quelques primitives usuelles et démo : Résolution d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre un.

Exercice 1

1. Pour quels r dans $\mathbb{K}$ la fonction $x \mapsto \exp(rx)$ est-elle solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$?
2. On suppose que le discriminant de l'équation $X^2 + aX + b = 0$ est nul et on note r_0 la racine double. Montrer que $x \mapsto x\exp(r_0 x)$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Exercice 2

1. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\right)$$
2. En déduire, à l'aide d'un changement de variable que :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}dx.$$
3. Montrer de deux façons différentes que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
4. En déduire que :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}.$$

   Indication : Utilisez le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Donner quelques primitives usuelles mais pas celles de votre voisin de gauche et démo : Variation de la constante pour l'ordre un.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$, $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$ et $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln(t)}}{t}dt$.

Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9 \ (E_1) \ \text{ et } \ y'' - 2y' + 5y = \exp(x)\cos(2x) \ (E_2).$$
2. Discuter suivant les valeurs du réel m de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2my' + y = \exp(-x).$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :
$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \ (E).$$

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre un et démo : Soient $r \in \mathbb{C}$, $(b,c) \in \mathbb{K}^2$ et (H) l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$.

- $x \mapsto \exp(rx)$ est une solution de (H) si et seulement si r est une racine du polynôme caractéristique de (H).
- $x \mapsto x\exp(rx)$ est une solution de (H) si r est une racine double du polynôme caractéristique de (H).

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt$ et enfin $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))}dt$.

Exercice 2

1. Résoudre l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + y = \sin(\lambda x) \quad (E_\lambda)$$
où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.
2. Discuter suivant les valeurs du réel m de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2my' + y = 0.$$
3. On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:
$$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2 \ (E).$$
   (a) On suppose que f vérifie (E). On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
   (b) Résoudre (E') sachant qu'il existe a, b et c trois réels tels que $x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de (E').
   (c) En déduire les solutions de (E).