MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 7 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Donner quelques primitives usuelles et démo : Primitivation par parties et changement de variables.

Exercice 1

Soit m un entier naturel non nul. Pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant m$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} dx.$$

1. (Question indépendante!) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\arctan(t)(1+t^2)} dt$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n < m$, on a :
$$I_n = \frac{m-n}{n+1} I_{n+1}.$$
3. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n.

Exercice 2

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Donner quelques idées pour trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre deux et démo : Intégration et parité, périodicité et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \arctan(\sin(t))dt$.

Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions dérivable :
$$y' + y = \frac{1}{1+e^x}. \ (E)$$
2. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$.

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle :
$$xy' + (1-x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $]0, +\infty[$ qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Expliquer comment résoudre une équation différentielle homogène d'ordre deux à coefficient constant et démo : Primitivation de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable : $y'' + 2y' + y = 0$. (E)
2. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable : $y'' + y' + y = \cos(x)$ (E)
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable : $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$. (E)

Exercice 2

Pour tout couple d'entiers naturels (n,p), on pose : $J_{n,p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^p(t)dt$.

1. Calculer $J_{0,0}$, $J_{1,0}$, $J_{0,1}$ et $J_{1,1}$.
2. Montrer que $J_{n,p} = J_{n,p-2} - J_{n+2,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2.
3. Montrer que $J_{n,p} = \dfrac{p-1}{n+1} J_{n+2,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2.
4. Montrer que $J_{n,p} = \dfrac{p-1}{n+p} J_{n,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2 et $J_{n,p} = \dfrac{n-1}{n+p} J_{n-2,p}$ si p est un entier naturel et si n est un entier supérieur à 2.
5. En déduire $J_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

MP2I **Sujet 1** Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Expliquer comment résoudre une équation différentielle homogène d'ordre deux à coefficient constant et démo : Primitivation par parties et changement de variables.

Exercice 1

Soit m un entier naturel non nul. Pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant m$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} dx.$$

1. (Question indépendante!) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\arctan(t)(1+t^2)} dt$
2. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n < m$, on a :

$$I_n = \frac{m-n}{n+1} I_{n+1}.$$

3. Expliciter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n.

Exercice 2

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 7 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Donner quelques idées pour trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre un et démo : Intégration et parité, périodicité et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \arctan(\sin(t))dt$.

Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions dérivable :
$$y' + y = \frac{1}{1+e^x}. \ (E)$$
2. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))dx$.

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle :
$$xy' + (1 - x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $]0, +\infty[$ qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 7 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Expliquer comment primitiver une fraction rationnelle du type constante sur degré 2 et démo : Primitivation de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable : $y'' + 2y' + y = 0$. (E)
2. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable : $y'' + y' + y = \cos(x)$ (E)
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable : $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$. (E)

Exercice 2

Pour tout couple d'entiers naturels (n,p), on pose : $J_{n,p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^p(t)dt$.

1. Calculer $J_{0,0}$, $J_{1,0}$, $J_{0,1}$ et $J_{1,1}$.
2. Montrer que $J_{n,p} = J_{n,p-2} - J_{n+2,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2.
3. Montrer que $J_{n,p} = \dfrac{p-1}{n+1} J_{n+2,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2.
4. Montrer que $J_{n,p} = \dfrac{p-1}{n+p} J_{n,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2 et $J_{n,p} = \dfrac{n-1}{n+p} J_{n-2,p}$ si p est un entier naturel et si n est un entier supérieur à 2.
5. En déduire $J_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.