

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

1. Pour quels r dans $\mathbb{K}$ la fonction $x \mapsto \exp(rx)$ est-elle solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$?
2. On suppose que le discriminant de l'équation $X^2 + aX + b = 0$ est nul et on note r_0 la racine double. Montrer que $x \mapsto x \exp(r_0 x)$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$xy' - y = \ln(x).$$

2. Résoudre le problème de Cauchy suivant d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$y' + xy = x^2 + 1 \text{ avec } y(0) = 0.$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + 5y = 2 \cos^2(x).$$

Exercice 2

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , on ait :

$$3 \int_0^x f(t) dt = 2x f(x).$$

MP2I **Sujet 2**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Solution d'une équa diff linéaire homogène d'ordre un avec démo....

Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$y' + e^x y = 5e^x.$$

2. Résoudre le problème de Cauchy suivant d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \text{ avec } y(0) = 2.$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 2y' + 5y = x + \sin(2x)e^{-x}.$$

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy' + (1 - x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $]0, +\infty[$ qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

Définition et QC

Montrer que la solution générale d'une équation (E) avec second membre est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Exercice 1

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(1 + x^2)y' - 2xy = x.$$

2. Résoudre le problème de Cauchy suivant d'inconnue y fonction dérivable sur $] -1, +\infty[$:

$$(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x) \text{ avec } y(0) = e.$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 2y' + y = (x - 1)e^{-x}.$$

Exercice 2

On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2 \quad (E).$$

1. On suppose que f vérifie (E) . On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .
3. Résoudre l'équation différentielle (E'') suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \quad (E'')$$