

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59 algèbre

Énoncé exercice 59

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - (a) sans utiliser de matrice de f ,
 - (b) en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Corrigé exercice 59

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall P \in E \setminus \{0\}, \deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.
 Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.
 On en déduit que $\forall P \in E, \deg f(P) = \deg P$.
 Donc $f(E) \subset E$. (**)

D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E .

- (a) Déterminons $\text{Ker } f$.

Soit $P \in \text{Ker } f$.

$f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.

Or, d'après ce qui précède, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.

Donc $P = 0$.

On en déduit que $\text{Ker } f = \{0\}$.

Donc f est injectif.

Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

- (b) Soit $e = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E . Soit A la matrice de f dans la base e .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

$\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.

Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.

D'après 1. : $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.

$P - P' = Q, P' - P'' = Q', \dots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.

Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \dots + Q^{(n)}$.

3. Reprenons les notations de 1.(b).

Tout revient à se demander si A est diagonalisable.

Notons χ_A le polynôme caractéristique de A .

D'après 1.(b), on a $\chi_A = (X - 1)^{n+1}$.

Donc 1 est l'unique valeur propre de A .

Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1} .

On aurait donc $A = I_{n+1}$.

Ce qui est manifestement faux car $f \neq \text{Id}$.

Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 62 algèbre

Énoncé exercice 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - (a) en utilisant le lemme des noyaux.
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Corrigé exercice 62

1. f est linéaire donc :

$$f^2 - f - 2\text{Id} = 0 \iff f \circ (f - \text{Id}) = (f - \text{Id}) \circ f = 2\text{Id} \iff f \circ (\tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}\text{Id}) = (\tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}\text{Id}) \circ f = \text{Id}.$$

On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}\text{Id}$.

2. (a) On pose $P = X^2 - X - 2$. On a $P = (X + 1)(X - 2)$.

$P_1 = X + 1$ et $P_2 = X - 2$ sont premiers entre eux.

Donc, d'après le lemme des noyaux, $\text{Ker}P(f) = \text{Ker}P_1(f) \oplus \text{Ker}P_2(f)$.

Or P est annulateur de f , donc $\text{Ker}P(f) = E$.

Donc $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

- (b) **Analyse (unicité) :**

Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Alors par linéarité de f , $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.

On en déduit que $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

Synthèse (existence) :

Soit $x \in E$. On pose $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

On a bien $x = a + b$. (*)

$(f + \text{Id})(a) = \frac{1}{3}(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)) = \frac{1}{3}(-f^2(x) + f(x) + 2x) = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$. (**)

$(f - 2\text{Id})(b) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)) = \frac{1}{3}(f^2(x) - f(x) - 2x) = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (***)

D'après (*), (**), (***) , $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Conclusion : $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

3. Prouvons que $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Soit $y \in \text{Im}(f + \text{Id})$.

$\exists x \in E / y = f(x) + x$.

Alors $(f - 2\text{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

Donc $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Donc $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (*)

Posons $\dim E = n$.

D'après 2., $n = \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \text{Ker}(f + \text{Id}) + \dim \text{Im}(f + \text{Id})$.

On en déduit que $\dim \text{Im}(f + \text{Id}) = \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

EXERCICE 65 algèbre

Énoncé exercice 65

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
 (b) Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
 (P polynôme annulateur de u) $\implies$ (PQ polynôme annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Écrire le polynôme caractéristique de A , puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A .

Corrigé exercice 65

1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$P = \sum_{p=0}^n a_p X^p \text{ et } Q = \sum_{q=0}^m b_q X^q.$$
 Donc $PQ = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_p b_q X^{p+q})$.
 Donc $(PQ)(u) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_p b_q u^{p+q}) \quad (*)$
 Or $P(u) \circ Q(u) = \left(\sum_{p=0}^n a_p u^p \right) \circ \left(\sum_{q=0}^m b_q u^q \right) = \sum_{p=0}^n \left(a_p u^p \circ \sum_{q=0}^m b_q u^q \right)$.
 Donc, par linéarité de u , $P(u) \circ Q(u) = \sum_{p=0}^n \left(\sum_{q=0}^m a_p u^p \circ b_q u^q \right) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_p b_q u^{p+q}) \quad (**)$
 D'après (*) et (**), $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
 D'après 1., $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.
 De même, d'après 1., $Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$.
 Or $PQ = QP$ donc $(PQ)(u) = (QP)(u)$.
 On en déduit que $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
 (b) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
 On suppose que P est annulateur de u .
 Prouvons que PQ est annulateur de u .
 D'après 1., $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
 Or P est annulateur de u donc $P(u) = 0$ donc $(PQ)(u) = 0$.
 On en déduit que PQ est annulateur de u .
3. Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A .
 $P_A(X) = \det(XI_2 - A)$. On trouve $P_A(X) = X(X - 1)$.
 Soit $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$.
 On remarque que $R(0) = R(1) = 0$ et on en déduit que R est factorisable par $X(X - 1)$.
 C'est-à-dire : $\exists Q \in \mathbb{K}[X] / R = X(X - 1)Q$.
 Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(X) = X(X - 1)$ annule A .
 Donc, d'après 2.b., comme $R = P_A(X)Q$, R est annulateur de A .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

$$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = (1+\lambda)u(n)$$

Ainsi

$$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$$

Pour $\lambda \in]-2, 0[$, la suite $u(n) = (1+\lambda)^n$ est élément non nul de E et vérifie $\Delta(u) = \lambda u$.

Pour $\lambda \notin]-2, 0[$, seule la suite nulle est convergente vers 0 et satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$$

On peut donc conclure

$$\text{Sp}(\Delta) =]-2, 0[$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. Si $I(f) = \lambda f$ alors $I(f)$ est solution de l'équation différentielle

$$y = \lambda y'$$

Si $\lambda = 0$ alors $I(f) = 0$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $I(f)$ est de la forme $x \mapsto Ce^{x/\lambda}$ et puisque $I(f)$ s'annule en 0 donc $I(f) = 0$.

Dans les deux cas $f = I(f)' = 0$. Ainsi

$$\text{Sp}(I) = \emptyset$$

Soit λ un réel et f une fonction élément de E .

Si $T(f) = \lambda f$ alors

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = \lambda f(x)$$

En passant cette relation à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\ell = \lambda \ell$$

en notant ℓ la limite de f .

Cas $\ell \neq 0$:

Nécessairement $\lambda = 1$ et

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = f(x)$$

Puisque la fonction f est périodique et converge en $+\infty$, elle est constante. Inversement, toute fonction constante non nulle est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Cas $\ell = 0$:

Si λ est valeur propre alors en introduisant f vecteur propre associé, il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et la relation $T(f) = \lambda f$ donne par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_0 + n) = \lambda^n f(x_0)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|\lambda| < 1$.

Inversement, supposons $|\lambda| < 1$.

Si $T(f) = \lambda f$ alors

$$f(1) = \lambda f(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x+n) = \lambda^n f(x)$$

La fonction f est donc entièrement déterminée par sa restriction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1) = \lambda f(0)$.

Inversement, si $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant

$\varphi(1) = \lambda \varphi(0)$ alors la fonction f donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x+n) = \lambda^n \varphi(x)$$

et continue (on vérifie la continuité en $k \in \mathbb{N}^*$ par continuité à droite et à gauche), converge vers 0 en $+\infty$ et vérifie $T(f) = \lambda f$.

Puisqu'il est possible de construire une fonction non nulle de la sorte, le scalaire $\lambda \in]-1, 1[$ est valeur propre et les vecteurs propres associés sont les fonctions non nulles de la forme précédente.

a) $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ avec $D(a, b) = \text{diag}((a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^2-b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M(a, b)^n \rightarrow 0$ si, et seulement si, $|a+b| < 1$, $|a-b| < 1$ et $|a^2-b^2| < 1$.

Or $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.

L'étude graphique est alors simple.

Exercice 2 : [\[énoncé\]](#)

Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \text{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \text{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.

Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors 3 = $\dim E$ valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

Exercice 3 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B) \det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice $A + \frac{1}{p}I_n$ n'est pas inversible seulement si $-1/p$ est valeur propre de A . Puisque la matrice A ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour p assez grand on est sûr que $A + \frac{1}{p}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Comme vu ci-dessus, pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{C}$, les polynômes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

Exercice 2 : [\[énoncé\]](#)

Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \text{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \text{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.

Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors 3 = $\dim E$ valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

Exercice 3 : [\[énoncé\]](#)

a) Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B) \det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice $A + \frac{1}{p}I_n$ n'est pas inversible seulement si $-1/p$ est valeur propre de A . Puisque la matrice A ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour p assez grand on est sûr que $A + \frac{1}{p}I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Comme vu ci-dessus, pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, on obtient $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{C}$, les polynômes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.