BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Image d'une application linéaire : Définition ? Lien avec surjectivité ? Famille génératrice ? Lien avec le rang ?

Exercice 1

k (k entier naturel non nul) urnes numérotées de 1 à k contiennent chacune 4 boules numérotées de 1 à 4. On extrait une boule de chaque urne et, pour tout i de $[\![1,k]\!]$, on note X_i le numéro de la boule tirée de l'urne i. On pose $M = \max(X_i, i \in [\![1,k]\!])$. Déterminer la loi de M.

Exercice 2

Soit $D = \text{Vect}((1,1,2))$ et $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x;y;z) & \mapsto (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de f, déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer une base de P.
3. Vérifier que P et D sont supplémentaires, cela signifie que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme $x_1 + x_2$ avec x_1 dans P et x_2 dans D.
4. Montrer que $f(D) \subset D$.
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \cdots$ de gauche à droite. Une puce, qui est à la case 0 au départ, se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Pour tout entier naturel n, on note X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où elle a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Soit n un entier naturel.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 2

On définit l'application f sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ par :

$$f : (x, y, z) \mapsto (x - y, -x + y, 2x + 2y + 2z)$$

F désigne l'ensemble : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel dont on donnera une base $\mathcal{B}_1$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer le noyau de f et en préciser une base. f est-il un automorphisme de E ?
4. Donner une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Im}(f)$. Justifier l'égalité $\text{Im}(f) = F$.
5. Montrer que tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme $x_1 + x_2$ avec x_1 dans $\text{Ker}(f)$ et x_2 dans $\text{Im}(f)$.
6. Montrer que $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$et écrire la matrice de f dans cette base.
7. Montrer que : $f^2 = 2f$ puis expliciter f^k pour tout entier naturel k.
8. Soit un vecteur u de $\mathbb{R}^3$. On pose : $w = f(u) - 2u$. Calculer $f(w)$ et en déduire que : $\text{Im}(f - 2Id_E) = \text{Ker}(f)$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Inégalités de Markov et de Tchebychev : énoncé et interprétation.

Exercice 1

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) & \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - 3f' + 2f \end{cases}$ et g l' application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que : $g(3,0) = (0,0,0)$ et $g(2,4) = (1,0,0)$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Expliciter le noyau de φ.
3. Prouver l'existence de g.
4. Expliciter noyau et image de g.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une urne de n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On arrête quand on obtient un numéro déjà obtenu. Soit T_n le rang de la dernière boule tirée.

1. On considère uniquement dans cette question que $n = 3$. Donner la loi de T_3 et son espérance.
2. Déterminer $T_n(\Omega)$ et montrer que : $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(T_n > k)$.
3. Montrer que $P(T_n > k) = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
4. Donner la loi de T_n.