BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Noyau d'une application linéaire : Définition ? Lien avec injectivité ? Lien avec le rang ?.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de de paramètre λ (λ réel strictement positif). Déterminer la loi et l'espérance de la variable $(-1)^X$.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et f un endomorphisme de E tels que :

$$f^2 = 0 \quad \text{et} \quad f \neq 0.$$

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$ et en déduire que le rang de f vaut 1 ou 2.
2. Montrer que si $\operatorname{rang}(f) = 1$ alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que si $\operatorname{rang}(f) = 2$ alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Conclure.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(
Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Espérance et variance d'une loi binomiale et d'une loi de Poisson.

Exercice 1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, y, 0) \end{cases}$ et g l' application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$g(3,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $g(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice canoniquement associée à f.
3. Expliciter noyau et image de f.
4. Prouver l'existence de g.
5. Expliciter noyau et image de g.

Exercice 2

Le jour du concours, n élèves (n entier naturel non nul) n'ont pas assez soigné la présentation de leur copie. M. Vignault, plutôt que de s'escrimer à lire d'infâmes brouillons, décide de noter au hasard, de manière indépendante, les n copies, en leur attribuant une note entière, au hasard, entre 0 et 20. On note X_n la variable aléatoire égale à la meilleure note du groupe.

1. Expliciter la loi de X_n.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (P(X_n = k))$ pour tout entier naturel k. Interpréter.
3. Calculer $E(X_n)$ et donner un équivalent de $(20 - E(X_n))$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Espérance et variance d'une loi de Bernoulli et d'une loi géométrique.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

1. Calculer A^2. A est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}\,(f)$.
3. Montrer que la concaténation d'une base du noyau de f et de son image est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

On place dans une urne n (n entier naturel non nul) boules qui sont soit rouges soit blanches. On ne connaît pas a priori le nombre de boules blanches : c'est une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

1. On tire une boule dans l'urne. Calculer, en fonction de l'espérance de X, la probabilité qu'elle soit blanche.
2. On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne. On note B_i l'événement " la i-ième boule tirée est blanche " (avec $i \in \{1, 2\}$).
   (a) Calculer, en fonction de $E(X^2)$, la probabilité de $B_1 \cap B_2$.
   (b) Montrer que B_1 et B_2 sont indépendants si et seulement si X est de variance nulle, et interpréter ce résultat.
   (c) Montrer et interpréter l'inégalité $P_{B_1}(B_2) \geqslant P(B_2)$.