EXERCICE 67 algèbre

Énoncé exercice 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé exercice 67

$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$.
Après calculs, on trouve, $\chi_M = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

Premier cas : $ca - ba - bc < 0$
M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$
Alors, 0 est la seule valeur propre de M.
Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$. Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.
On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$
Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

EXERCICE 69 algèbre

Énoncé exercice 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé exercice 69

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
   Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.
   Donc $\mathrm{rg} A = 3$.
   Deuxième cas : $a = 0$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A = 2$.

   Troisième cas : $a = -1$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.
   Or $\det A = 0$ donc $\mathrm{rg} A \leqslant 2$.
   On en déduit que $\mathrm{rg} A = 2$.
2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
   $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
   Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1 + a & \lambda + 1 \end{vmatrix}$.
   Donc, en développant par rapport à la première colonne,
   $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
   Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
   Les racines de χ_A sont $a + 1$, $-a$ et -1.
   $a + 1 = -a \Longleftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.
   $a + 1 = -1 \Longleftrightarrow a = -2$.
   $-a = -1 \Longleftrightarrow a = 1$.
   Ce qui amène aux quatre cas suivants :

   Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$
   Alors A admet trois valeurs propres disctinctes.
   Donc A est diagonalisable.
   Deuxième cas : $a = 1$
   $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$.
   Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Donc A est diagonalisable.

   Autre méthode :

A est symétrique réelle donc diagonalisable.

Troisième cas : $a = -2$
Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.
$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, -1 est valeur propre de A, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.
Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a = -\dfrac{1}{2}$
$\chi_A = (X - \dfrac{1}{2})^2(X+1)$.
$A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Les deux premières colonnes de $A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\dfrac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A est non diagonalisable.

EXERCICE 70 algèbre

Énoncé exercice 70

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Corrigé exercice 70

1. $\chi_A = X^3 - 1$ donc $\mathrm{Sp}A = \{1, j, j^2\}$.
   On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.
   On pose $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_3)$, $E_j(A) = \mathrm{Ker}(A - j\mathrm{I}_3)$ et $E_{j^2}(A) = \mathrm{Ker}(A - j^2\mathrm{I}_3)$.
   Après résolution, on trouve $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_j(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$.
   Et, par conjugaison (comme A est à coefficients réels), $E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   On pose $e'_1 = (1,1,1)$, $e'_2 = (1, j^2, j)$, $e'_3 = (1, j, j^2)$ et $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
   D'après 1., e' est une base de vecteurs propres pour f.
   Soit P la matrice de passage de e à e'. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.
   Alors, $D = P^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$.
   On en déduit que $B = a\mathrm{I}_3 + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P\left(aI_3 + bD + cD^2\right)P^{-1}$.
   C'est-à-dire, si on pose $Q = a + bX + cX^2$, alors $B = P\begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(j) & 0 \\ 0 & 0 & Q(j^2) \end{pmatrix}P^{-1}$.
   On en déduit que B est diagonalisable et que les valeurs propres, distinctes ou non, de B sont $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.

   Premier cas : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont deux à deux distincts

   B possède trois valeurs propres distinctes : $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$.
   De plus, on peut affirmer que :
   $E_{Q(1)}(B) = E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $E_{Q(j)}(B) = E_j(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$ et
   $E_{Q(j^2)}(B) = E_{j^2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$.

   Deuxième cas : deux valeurs exactement parmi $Q(1)$, $Q(j)$ et $Q(j^2)$ sont égales.

   Supposons par exemple que $Q(1) = Q(j)$ et $Q(j^2) \neq Q(1)$.
   B possède deux valeurs propres distinctes : $Q(1)$ et $Q(j^2)$.
   De plus, on peut affirmer que :
   $E_{Q(1)}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right)$ et $E_{Q(j^2)}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right)$.

   Troisième cas : $Q(1) = Q(j) = Q(j^2)$.

   B possède une unique valeur propre : $Q(1)$.
   De plus, on peut affirmer que $B = Q(1)\mathrm{I}_3$ et $E_{Q(1)}(B) = \mathbb{C}^3$.

(a) $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$ avec $D(a,b) = \operatorname{diag}((a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^2-b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $M(a,b)^n \to 0$ si, et seulement si, $|a+b| < 1$, $|a-b| < 1$ et $\left|a^2 - b^2\right| < 1$.
Or $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.
L'étude graphique est alors simple.

Exercice 2 : [énoncé]
Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \mathrm{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.
Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors $3 = \dim E$valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

A a donc, d'après l'énoncé, trois vecteurs propres formant une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ (car famille libre de 3 éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$) et est de taille 3, elle est donc diagonalisable.

Appelons λ_1 la valeur propre associée à X, λ_2 la valeur propre associée à Y et λ_3 la valeur propre associée à Z.

On a donc : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Développons tout ça, on obtient que :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3 & \lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_1-\lambda_3 & \lambda_1+2\lambda_3 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+2\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Or on sait que A est $\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix}$. En utilisant la première colonne, on peut donc affirmer que :

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \lambda_1-\lambda_3 = \lambda_1-\lambda_2 = 3$$

ce qui donne : $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Terminons le travail :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

1. (a) On calcule J^2 puis J^3, on obtient que : $J^3 = I_3$.

   (b) On résout l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe. En utilisant les notions de racines $n^{ième}$, on obtient que 1, j (en posant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) et j^2 sont les solutions de cette équation. On refait la démo de la méthode sur les polynômes annulateurs pour démontrer que les trois valeurs propres possibles de J sont donc 1, j et j^2.

   (c) Pour montrer que 1, j et j^2 sont bien les valeurs propres de J (ce qu'on ne sait pas encore, on vous rappelle qu'un nombre peut être une racine d'un polynôme annulateur d'une matrice sans en être une valeur propre), on introduit, comme d'hab, pour λ valant 1, j ou j^2, ce système : (S_λ) : $J\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

   Bref, calcul habituel.... Puisque $j^3 = 1$, on obtient que :

   $$J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, J\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = j\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = j^2\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

   Ceci prouve que 1, j et j^2 sont bien des valeurs propres de J... et même les valeurs propres de J (car un nombre ne peut pas être une valeur propre d'une matrice si elle n'est pas racine d'un polynôme annulateur de cette matrice).

2. (a) No problemo : $M = aI_3 + bJ + cJ^2$.

   (b) On sait que $J = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$. Cela donne : $J^2 = PD^2P^{-1}$ et donc :

   $$M = aI_3 + bJ + cJ^2 = aPI_3P^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$$

   Or, $aI_3 + bD + cD^2$ est $\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+jb+j^2c & 0 \\ 0 & 0 & a+j^2b+jc \end{pmatrix}$. Elle est donc diagonale et M est donc diagonalisable...

   (c) ... et les valeurs propres de M sont donc $a+b+c$, $a+jb+j^2c$ et $a+j^2b+jc$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\det(xI_n - AB) = \det A \det(xA^{-1} - B) = \det(xA^{-1} - B) \det A = \det(xI_n - BA)$$

donc

$$\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

b) La matrice $A + \frac{1}{p} I_n$ n'est pas inversible seulement si $-1/p$ est valeur propre de A. Puisque la matrice A ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres, pour p assez grand on est sûr que $A + \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Comme vu ci-dessus, pour $x \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{(A+\frac{1}{p}I_n)B}(x) = \chi_{B(A+\frac{1}{p}I_n)}(x)$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.
Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{C}$, les polynômes χ_{AB} et χ_{BA} sont égaux.

Exercice 6 : [énoncé]
a) Le polynôme caractéristique de f est un polynôme de degré n annulant f.
Ainsi $f^n \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $m \geqslant n$, $f^m \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.
Par suite $f^n(x), \ldots, f^{N-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ puis $E = \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{N-1}(x))$ donne $E = \text{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$. La famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est alors génératrice et formée de $n = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc une base de E.
b) Les polynômes en f commute avec f.
Inversement, supposons que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f. Puisque $g(x) \in E$, on peut écrire $g(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x)$.
Puisque f et g commute, on a encore
$g(f^k(x)) = a_0 f^k(x) + a_1 f^{k+1}(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n+k-1}(x)$ de sorte que les endomorphismes g et $a_0 \text{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$ coïncident sur une base de E et c'est donc égaux. Au final f est un polynôme en f.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

$$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = (1+\lambda)u(n)$$

Ainsi

$$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$$

Pour $\lambda \in \left]-2, 0\right[$, la suite $u(n) = (1+\lambda)^n$ est élément non nul de E et vérifie $\Delta(u) = \lambda u$.
Pour $\lambda \notin \left]-2, 0\right[$, seule la suite nulle est converge vers 0 et satisfait

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$$

On peut donc conclure

$$\mathrm{Sp}(\Delta) = \left]-2, 0\right[$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. Si $I(f) = \lambda f$ alors $I(f)$ est solution de l'équation différentielle

$$y = \lambda y'$$

Si $\lambda = 0$ alors $I(f) = 0$.
Si $\lambda \neq 0$ alors $I(f)$ est de la forme $x \mapsto Ce^{x/\lambda}$ et puisque $I(f)$ s'annule en 0 donc $I(f) = 0$.
Dans les deux cas $f = I(f)' = 0$. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(I) = \emptyset$$

Soit λ un réel et f une fonction élément de E.
Si $T(f) = \lambda f$ alors

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = \lambda f(x)$$

En passant cette relation à la limite quand $x \to +\infty$, on obtient

$$\ell = \lambda \ell$$

en notant ℓ la limite de f.
Cas $\ell \neq 0$:
Nécessairement $\lambda = 1$ et

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x+1) = f(x)$$

Puisque la fonction f est périodique et converge en $+\infty$, elle est constante.
Inversement, toute fonction constante non nulle est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Cas $\ell = 0$:
Si λ est valeur propre alors en introduisant f vecteur propre associé, il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et la relation $T(f) = \lambda f$ donne par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_0 + n) = \lambda^n f(x_0)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|\lambda| < 1$.
Inversement, supposons $|\lambda| < 1$.
Si $T(f) = \lambda f$ alors

$$f(1) = \lambda f(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x+n) = \lambda^n f(x)$$

La fonction f est donc entièrement déterminée par sa restriction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $f(1) = \lambda f(0)$.
Inversement, si $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $\varphi(1) = \lambda\varphi(0)$ alors la fonction f donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, f(x+n) = \lambda^n \varphi(x)$$

et continue (on vérifie la continuité en $k \in \mathbb{N}^*$ par continuité à droite et à gauche), converge vers 0 en $+\infty$ et vérifie $T(f) = \lambda f$.
Puisqu'il est possible de construire une fonction non nulle de la sorte, le scalaire $\lambda \in \left]-1, 1\right[$ est valeur propre et les vecteurs propres associés sont les fonctions non nulles de la forme précédente.