MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Si λ est une valeur propre de multiplicité m alors on peut dire que $\dim(E_\lambda)$ appartient à ...

Exercice 1

Banque CCINP : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

1. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
2. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soient E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et Δ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Delta : u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

   (a) Vérifier que E est un espace vectoriel et que Δ est un endomorphisme de E.

   (b) Expliciter le spectre de Δ.

   (c) Δ est-il injectif ?

2. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ avec n un entier naturel non nul. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

   (a) Établir l'égalité quand $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

   (b) Pour $A \notin GL_n(\mathbb{C})$, justifier que $A + \frac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ pour p entier naturel assez grand.

   (c) En déduire que l'égalité est encore vraie pour A non inversible.

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Un endomorphisme de rang 1 de E espace de dimension supérieure à 2 est diagonalisable si et seulement si sa trace....

Exercice 1

Banque CCINP : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant
$$f^4 = f^2.$$
   On suppose que 1 et -1 sont des valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.
2. Soient a et b deux réels, on pose :
$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que ces matrices sont simultanément diagonalisable puis étudier et représenter graphiquement l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(M(a, b))^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 9 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Diagonalisabilité par blocs

Exercice 1

Banque CCINP : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
   (a) Calculer J^3 et en déduire que J est diagonalisable.
   (b) Montrer que M est diagonalisable.
   (c) Donner les valeurs propres de M.
2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
   On suppose qu'il existe $x \in E$ et $N \in \mathbb{N}^\star$ tels que $(x, f(x), \ldots, f^{N-1}(x))$ soit une famille génératrice de E.
   (a) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
   (b) Démontrer que les endomorphismes commutant avec f sont les polynômes en f.
3. Étude de la diagonalisabilité et diagonlisation de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.