EXERCICE 67 algèbre

Énoncé exercice 67

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé exercice 67

$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M)$.
Après calculs, on trouve, $\chi_M = X(X^2 + ca - ba - bc)$.

Premier cas : $ca - ba - bc < 0$
M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car M possède trois valeurs propres réelles distinctes.
Elle est, a fortiori, diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Deuxième cas : $ca - ba - bc = 0$
Alors, 0 est la seule valeur propre de M.
Ainsi, si M est diagonalisable, alors M est semblable à la matrice nulle c'est-à-dire $M = 0$ ou encore $a = b = c = 0$. Réciproquement, si $a = b = c = 0$ alors $M = 0$ et donc M est diagonalisable.
On en déduit que M est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = 0$.

Troisième cas : $ca - ba - bc > 0$
Alors 0 est la seule valeur propre réelle et donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car $\chi_M(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
En revanche, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres complexes distinctes.

EXERCICE 69 algèbre

Énoncé exercice 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé exercice 69

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
   Premier cas : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.
   Donc $\mathrm{rg} A = 3$.
   Deuxième cas : $a = 0$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A = 2$.

   Troisième cas : $a = -1$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.
   Or $\det A = 0$ donc $\mathrm{rg} A \leqslant 2$.
   On en déduit que $\mathrm{rg} A = 2$.
2. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.
   $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
   Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1 + a & \lambda + 1 \end{vmatrix}$.
   Donc, en développant par rapport à la première colonne,
   $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
   Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
   Les racines de χ_A sont $a + 1$, $-a$ et -1.
   $a + 1 = -a \iff a = -\dfrac{1}{2}$.
   $a + 1 = -1 \iff a = -2$.
   $-a = -1 \iff a = 1$.
   Ce qui amène aux quatre cas suivants :

   Premier cas : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$
   Alors A admet trois valeurs propres disctinctes.
   Donc A est diagonalisable.
   Deuxième cas : $a = 1$
   $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$.
   Alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Donc A est diagonalisable.

   Autre méthode :

A est symétrique réelle donc diagonalisable.

Troisième cas : $a = -2$
Alors, $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.
$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Les deux premières colonnes de $A + \mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, -1 est valeur propre de A, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$.
Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a = -\dfrac{1}{2}$
$\chi_A = (X - \dfrac{1}{2})^2(X+1)$.
$A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Les deux premières colonnes de $A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \geqslant 2$.
De plus, $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) \leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\dfrac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A est non diagonalisable.

Exercice 2 : [énoncé]
Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \mathrm{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.
Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors $3 = \dim E$valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

a)

$$\|f\|_1 \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

et

$$\|f\|_2 \leqslant \left(\int_0^1 \|f\|_\infty^2\right)^{1/2} \leqslant \|f\|_\infty$$

Posons $f_n(x) = x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ alors que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$. Les normes ne sont donc pas équivalentes.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 1 \times |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 1\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

donc

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$$

Pour $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$, $\|f_n\|_2 = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \to 0$, les normes ne sont donc pas équivalentes.

---

a) Sans difficultés.

b) On a $N_1(f) \leqslant N_2(f)$ car

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(0)| + |x| \sup_{[-1,1]} |f'|$$

et sans difficultés on a aussi $N_3(f) \leqslant 2N_1(f)$.

Posons

$$f_n(x) = x^n$$

On a $N_1(f_n) = 1$, $N_2(f_n) = n$ et $N_3(f_n) = \frac{2}{n+1}$.

On en déduit que les normes N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part, ne sont pas équivalentes.

L'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car toute fonction continue sur le segment $[0,1]$ y est bornée

La liberté de la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une condition nécessaire car, sinon, une relation linéaire sur la famille $(f_1, \dots, f_n)$ détermine un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ non nul tel que $N(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Inversement, supposons la famille $(f_1, \dots, f_n)$ libre.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $N(x) = 0$ alors $x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = 0$ et donc $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ car $(f_1, \dots, f_n)$ libre.

$N(\lambda x) = \|\lambda x_1 f_1 + \cdots + \lambda x_n f_n\|_\infty = \|\lambda (x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)\|_\infty = |\lambda| N(x)$.

$N(x+y) = \|(x_1 + y_1) f_1 + \cdots + (x_n + y_n) f_n\|_\infty =$

$\|(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n)\|_\infty \leqslant N(x) + N(y)$.

Finalement N est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Si N est une norme alors

$$N(e_i) = a_i > 0$$

Il est donc nécessaire que les $a_1, \ldots, a_n$ soient tous strictement positifs pour que N soit une norme.
Inversement, supposons que les $a_1, \ldots, a_n$ sont tous strictement positifs.
L'application N est alors à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
La relation $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ est immédiate.
Puisque les a_i sont positifs, on a $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ car $a_i |x_i + y_i| \leqslant a_i |x_i| + a_i |y_i|$.
Enfin, si $N(x) = 0$ alors par nullité d'une somme de quantités positives

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_i |x_i| = 0$$

donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i = 0$$

i.e. $x = 0$

Corrections

a) Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Sinon :
Posons $y = \frac{x}{N_1(x)}$. On a $y \in B_1 \subset B_2$ donc $N_2(y) \leqslant 1$ d'où $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.
De manière symétrique $N_1(x) \leqslant N_2(x)$ puis l'égalité.
b) On reprend la démarche ci-dessus à partir de

$$y = \frac{x}{N_1(x) + \varepsilon}$$

avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir $N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon$ avant de faire tendre ε vers 0.

a) Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{av(u+v) + bu(u+v) - uv}{uv(u+v)}$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{a}v - \sqrt{b}u)^2 + (a + b + 2\sqrt{ab} - 1)uv}{uv(u+v)}$$

et si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ alors

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{a}v - \sqrt{b}u)^2}{uv(u+v)} \geqslant 0$$

b)

$$N((f+g)^{-1}) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t) + g(t)} \leqslant a \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} + b \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = aN(f^{-1}) + bN(g^{-1})$$

qui donne l'inégalité voulue avec

$$a = \frac{N(f)^2}{(N(f) + N(g))^2} \text{ et } b = \frac{N(g)^2}{(N(f) + N(g))^2}$$

qui sont tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$.
c) Par l'inégalité triangulaire

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant (N(f) + N(g))N((f+g)^{-1})$$

et en vertu de ce qui précède

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant \frac{N(f)^2 N(f^{-1})}{N(f) + N(g)} + \frac{N(g)^2 N(g^{-1})}{N(f) + N(g)}$$

qui donne

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant \frac{N(f)}{N(f) + N(g)} M + \frac{N(g)}{N(f) + N(g)} M = M$$

avec

$$M = \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$