MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34

# Colles de mathématiques de M Bacquelin

## Question de cours

Caractérisation séquentielle des parties fermées.

## Exercice 1

**Banque CCINP :** Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. $M$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

## Exercice 2

Soient $n$ un entier naturel non nul, $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto ||x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n||_\infty \end{cases}$$

À quelle condition, sur les $f_1, \cdots, f_n$, cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$ ?

## Exercice 3

On appelle $E$ l'ensemble $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$N_1 : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto |f(0)| + \sup(\{|f'(t)|, t \in [-1, 1]\}) \end{cases}$$

ainsi que :

$$N_2 : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)| dt \end{cases} \quad \text{et} \quad N_\infty = \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \sup(\{|f(t)|, t \in [-1, 1]\}) \end{cases}.$$

1. Montrer que ce sont des normes sur $E$.
2. Comparer $N_1$ et $N_\infty$ d'une part et $N_2$ et $N_\infty$ d'autre part.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Question de cours

Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un espace vectoriel $E$ et $\mathcal{O}$ un ouvert de $(E, N_2)$. On suppose :

$$\exists \beta > 0,\ \forall x \in E,\ N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

alors $\mathcal{O}$ est un ouvert de $(E, N_1)$.

## Exercice 1

**Banque CCINP :** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Diagonaliser $A$ puis trouver les éléments propres de $B$.

## Exercice 2

Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$. On note :

$$B_1 = \{x \in E \text{ tel que } N_1(x) \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{x \in E \text{ tel que } N_2(x) \leqslant 1\}.$$

1. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.
2. Même question avec les boules unités ouvertes.

## Exercice 3

On appelle $E$ l'ensemble $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_\star^+)$, $f$ et $g$ deux fonctions de $E$.

1. Montrer que $N$ définie sur $E$ par : $N : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une norme sur $E$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{u+v} \leqslant \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{v}$ si $a$ et $b$ sont deux réels positifs tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ et $u$ et $v$ sont deux réels strictement positifs.
3. Montrer que $N\left((f+g)^{-1}\right) \leqslant \dfrac{N(f)^2 N\left(f^{-1}\right) + N(g)^2 N\left(g^{-1}\right)}{(N(f) + N(g))^2}$.
4. En déduire que :

$$N(f+g)N\left((f+g)^{-1}\right) \leqslant \max\left(N(f)N\left(f^{-1}\right), N(g)N\left(g^{-1}\right)\right).$$

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 10 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?rep=34

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Question de cours

Une boule ouverte d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $E$ est un ouvert de $E$.

## Exercice 1

**Banque CCINP :** Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

## Exercice 2

Soient $n$ un entier naturel non nul, $a_1, \cdots, a_n$ des réels et :

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n| \end{cases}.$$

A quelle condition, sur les $a_1, \cdots, a_n$, cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$ ?

## Exercice 3

On appelle $E$ l'ensemble $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et on pose $N_1 : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt \end{cases}$ ainsi que :

$$N_2 : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad N_\infty = \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \sup(\{\, |f(t)|, t \in [0,1] \,\}) \end{cases}.$$

1. Montrer que ce sont des normes sur $E$.
2. Montrer que $N_\infty$ est plus fine que $N_1$ et $N_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.
3. Comparer $N_1$ et $N_2$.