MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Combien un système linéaire peut-il avoir de solutions ?
Démonstration: Démontrer que le produit matriciel (en cas d'existence) est associatif.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} & -y+2z+3t & = & 0 \\ 2x & +2y-z & = & 0 \\ 3x & -y+2z-2t & = & 0 \\ 5x & +y+z-2t & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{ll} x+3y-7z+2t & =1 \\ 2x+2y+z+2t & =0 \\ x-y-2z+t & =-1 \\ x+7y-4z+t & =3 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Soient $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité de taille 3.

1. Calculer A^2 puis trouver a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^{n+1} - 2X^n - X + 2$.
   (a) Montrer que P admet deux racines évidentes. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que ces racines sont simples.
   (b) En déduire un polynôme de degré 2 qui divise P.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $A^{n+1} - 2A^n - A + 2I_3 = 0$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = A^n + A - 2I_3$. Trouver une relation de récurrence entre G_{n+1} et G_n, puis en déduire A^n en fonction de n.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner le terme générale de AB avec A et B deux matrices.
Démonstration: Transposée d'une somme, produit, inverse.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants en fonction de la valeur de m.

1. $\begin{cases} x+y+-z=1 \\ 3x+y-z=1 \\ x-2y+2z=m \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$.

Exercice 2

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe des entiers naturels x_n et y_n tels que :
$$A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite $(x_n-y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer la valeur de x_n-y_n pour tout entier naturel n.
3. En déduire une relation entre x_{n+1} et x_n valable pour tout entier naturel n, puis déterminer x_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Matrices et opérations élémentaires : quelques explications...
Démonstration: Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-7z+2t &= 1 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ x-y-2z+t &= -1 \\ x+7y-4z+t &= 3 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x^6+xy+z &= 5 \\ x^2-x^3 &= 0 \\ 6x+5y+2z &= 13 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Soit B la matrice d'ordre 3 remplie de 1. Calculer B^k pour tout entier naturel k.
2. Proposer trois façons différentes de prouver que B n'est pas inversible.
3. Pour tout réel t de $]-1,1[$, on pose :

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que, pour tout (t,t') dans $]-1,1[^2$, il existe s dans $]-1,1[$ tel que :

$$A_s = A_t \times A_{t'}.$$

   (b) En déduire que A_t est inversible et donner son inverse.

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Combien un système linéaire peut-il avoir de solutions ?
Démonstration: Démontrer que le produit matriciel (en cas d'existence) est associatif.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{llll} & -y+2z+3t & = & 0 \\ 2x & +2y-z & = & 0 \\ 3x & -y+2z-2t & = & 0 \\ 5x & +y+z-2t & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{ll} x+3y-7z+2t & =1 \\ 2x+2y+z+2t & =0 \\ x-y-2z+t & =-1 \\ x+7y-4z+t & =3 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité de taille 3.

1. Calculer A^2 puis trouver a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = X^{n+1} - 2X^n - X + 2$.
   (a) Montrer que P admet deux racines évidentes. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que ces racines sont simples.
   (b) En déduire un polynôme de degré 2 qui divise P.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $A^{n+1} - 2A^n - A + 2I_3 = 0$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = A^n + A - 2I_3$. Trouver une relation de récurrence entre G_{n+1} et G_n, puis en déduire A^n en fonction de n.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner le terme générale de AB avec A et B deux matrices.
Démonstration: Transposée d'une somme, produit, inverse.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants en fonction de la valeur de m.

1. $\begin{cases} x+y+-z=1 \\ 3x+y-z=1 \\ x-2y+2z=m \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe des entiers naturels x_n et y_n tels que :
$$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer la valeur de $x_n - y_n$ pour tout entier naturel n.
3. En déduire une relation entre x_{n+1} et x_n valable pour tout entier naturel n, puis déterminer x_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Matrices et opérations élémentaires : quelques explications...
Démonstration: Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-7z+2t &= 1 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ x-y-2z+t &= -1 \\ x+7y-4z+t &= 3 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x^6+xy+z &= 5 \\ x^2-x^3 &= 0 \\ 6x+5y+2z &= 13 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 2

1. Soit B la matrice d'ordre 3 remplie de 1. Calculer B^k pour tout entier naturel k.
2. Proposer trois façons différentes de prouver que B n'est pas inversible.
3. Pour tout réel t de $]-1,1[$, on pose :
$$A_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que, pour tout (t,t') dans $]-1,1[^2$, il existe s dans $]-1,1[$ tel que :
   $$A_s = A_t \times A_{t'}.$$
   (b) En déduire que A_t est inversible et donner son inverse.