MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/MPSI-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Soit $\in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tous $(a, a', b, b') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors :

$$a + a' \equiv (b + b')[n], a \times a' \equiv b \times b'[n] \text{ et } a^m \equiv b^m[n].$$

Exercice 1

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{641} par 22.
2. Déterminer les PGCD, le PPCM, ainsi qu'un couple de coefficients de Bézout de 85 et 1176.
3. Résoudre l'équation $1173x + 529y = 69$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $M_n = 2^n - 1$ et $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Expliciter le quotient de X^{pq} pas $X^p - 1$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
2. Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que F_n et F_{n+k} avec $k \in \mathbb{N}^\star$ sont premiers entre eux.

MPSI **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 10 cahier-de-prepa.fr/MPSI-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Démontrer les preuves par 3, 9 et 11.

Exercice 1

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2013} par 5.
2. Déterminer les PGCD, le PPCM, ainsi qu'un couple de coefficients de Bézout de 715 et 136864.
3. Résoudre l'équation $7x - 12y = 3$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 2

1. Soit n un entier. Monter que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
2. Trouver les couples d'entiers naturels non nuls (x, y) tels que :

$$11x - 5y = 10 \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(x, y) = 10.$$

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/MPSI-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Démontrer l'unicité de la division euclidienne en cas d'existence.

Exercice 1

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2013^{2013} par 7.
2. Déterminer les PGCD, le PPCM, ainsi qu'un couple de coefficients de Bézout de 10164 et 50172.
3. Résoudre l'équation $2x + 5y = 13$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 2

On pose $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que $F_n \wedge F_{n+1} = 1$ pour tout entier naturel non nul n.
2. Montrer que $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$.
3. En déduire que $F_n | F_{kn}$ pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.
4. En déduire que $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}$ pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.