BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Loi géométrique : loi, espérance, variance ?

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie, d'une urne et d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. L'urne contient trois boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 4 et une boule portant le numéro 6. Le joueur lance la pièce : Si " pile " apparaît, il tire au hasard une boule de l'urne et note son numéro . Si " face " apparaît, il lance le dé et note le numéro sorti.

1. Calculer la probabilité d'obtenir le numéro 1, la probabilité d'obtenir le numéro 2 et la probabilité d'obtenir le numéro 6.
2. Calculer la probabilité d'avoir fait apparaître " face " au lancer de la pièce, sachant que l'on a obtenu le numéro 1.

Exercice 2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

1. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AV et en déduire une valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

   Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \max\{|x_k|,\ k \in [\![1,n]\!]\}$.

   (a) Montrer que $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset [-1,1]$.

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Loi de Poisson : loi, espérance, variance ?

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$ où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

1. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Calculer AX_k pour $k \in [\![1, 3]\!]$. En déduire les éléments propres de A.
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. Déterminer une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de f notée D est diagonale. Quelle relation peut-on écrire entre A et D ?

Exercice 2

Caïn et Abel jouent à un jeu. Caïn donne x cartes (x entier naturel compris entre 1 et 32) à son frère (Abel). Si ce dernier a dans sa main la roi de trèfle, il a gagné. Sinon, Caïn a gagné. En réalité, sans qu'Abel le voit, Caïn retire y (y entier naturel compris entre 1 et $32 - x$) cartes du jeu (sans regarder quelles cartes il a enlevé) avant de donner x cartes à son frère. Est-ce malin ?

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Définir valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur à 2. On dispose d'une urne contenant $n-1$ boules numérotées de 1 à $n-1$ et de n cartons $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Pour tout i compris entre 1 et n, le carton C_i contient i jetons numérotés de 1 à i. On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée porte le numéro i, on tire un jeton du carton C_i et un jeton du carton C_{i+1}. On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

1. Quelle est la probabilité p_2 de succès lorsque $n = 2$?
2. Quelle est la probabilité p_n de succès lorsque $n > 2$?
3. (a) Montrer que $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$ pour tout entier naturel k non nul et en déduire un équivalent au voisinage de l'infini de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (b) Donner un équivalent au voisinage de l'infini de p_n.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n et pour tout réel t, on pose :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k B^k}{k!} \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ les cœfficients de $E_n(t)$.

1. Expliciter B^n pour tout entier naturel n.
2. Soit t un réel. On pose $E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n(t)) & \lim\limits_{n\to+\infty} (b_n(t)) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (c_n(t)) & \lim\limits_{n\to+\infty} (d_n(t)) \end{pmatrix}$.
   (a) Expliciter $E(t)$.
   (b) Déterminer les matrices C et D telles que $E(t) = \exp(t)C + \exp(2t)D$.
   (c) Déduire, du calcul de CD, DC, C^2 et D^2, que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.