MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 10 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Inconnue auxiliaire : c'est quoi ?
Démonstration: Matrices de transvection : opération élémentaire modélisée, inversibilité.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lll} -y+2z+3t & = & 0 \\ 2x \quad +2y-z & = & 0 \\ 3x \quad -y+2z-2t & = & 0 \\ 5x \quad +y+z-2t & = & 1 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ll} X-Y & = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X+Y & = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right.$ d'inconnue $(X,Y) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2$.

Exercice 2

On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ (I_n - A) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) = I_n - A^p.$$
2. En déduire que $I_{n+1} - A$ est inversible si A est nilpotente et calculer son inverse.
3. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
4. Utiliser une autre méthode pour montrer que B est inversible et pour calculer B^{-1}.
5. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Expression des solutions d'un système de taille deux à l'aide de déterminants.
Démonstration: Algorithme du miroir.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-z+t & =1 \\ 2x+13y-7z+2t & =2 \\ x-y+z+t & =0 \\ x+7y-4z+t & =-1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:
$$\begin{cases} ax+by+z & =1 \\ x+aby+z & =b \\ x+by+az & =1 \end{cases}$$

Exercice 2

On suppose que M est une matrice carrée antisymétrique de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficient dans $\mathbb{R}$. On admet que $I_n + M$ est alors une matrice inversible. On pose :
$$C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}.$$

1. Montrer que $I_n - M$ est inversible puis que C est inversible.
2. Montrer que $C^T = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$.
3. Montrer que, si U et V sont des matrices carrées de même taille telles que V est inversible et $U \times V = V \times U$, alors
$$U \times V^{-1} = V^{-1} \times U.$$
4. En déduire que $C^T = C^{-1}$.

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 10 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Formule du binôme de Newton pour les matrices : formule ? Hypothèse ?
Démonstration: Inverse et opérations puis inverse d'une matrice d'ordre 2.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} 5x+15y-35z+10t & = 5 \\ 2x+2y+z+2t & = 0 \\ 7x-7y-14z+7t & = -7 \\ 10x+70y-40z+10t & = 30 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 4\cos(\theta)\cos(\varphi) = \sqrt{6} \\ 4\sin(\theta)\sin(\varphi) = \sqrt{2} \end{cases}$ d'inconnue $(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^3. En déduire une expression de A^3 en fonction de A.
2. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer le polynôme Q tel que $Q(X+1) = X^3+6X$.
4. Que vaut $Q(A+I)$?
5. En déduire que $I+A$ est inversible et calculer sa matrice inverse.

MP2I **Sujet 1** — Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Matrice inversible et opérations : inverse d'inverse, de produit, de transposée, de somme ?
Démonstration : Matrices de transvection : opération élémentaire modélisée, inversibilité.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} -y+2z+3t &= 0 \\ 2x+2y-z &= 0 \\ 3x-y+2z-2t &= 0 \\ 5x+y+z-2t &= 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} X-Y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X+Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$ d'inconnue $(X,Y) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2$.

Exercice 2

On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ (I_n - A) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right) = I_n - A^p.$$
2. En déduire que $I_{n+1} - A$ est inversible si A est nilpotente et calculer son inverse.
3. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
4. Utiliser une autre méthode pour montrer que B est inversible et pour calculer B^{-1}.
5. Calculer B^n pour tout entier naturel n.

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 10 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Inverse et matrice triangulaire : on peut dire quoi ?
Démonstration : Algorithme du miroir.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} x+3y-z+t & =1 \\ 2x+13y-7z+2t & =2 \\ x-y+z+t & =0 \\ x+7y-4z+t & =-1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:
$$\begin{cases} ax+by+z & =1 \\ x+aby+z & =b \\ x+by+az & =1 \end{cases}$$

Exercice 2

On suppose que M est une matrice carrée antisymétrique de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficient dans $\mathbb{R}$. On admet que $I_n + M$ est alors une matrice inversible. On pose :
$$C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}.$$

1. Montrer que $I_n - M$ est inversible puis que C est inversible.
2. Montrer que $C^T = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$.
3. Montrer que, si U et V sont des matrices carrées de même taille telles que V est inversible et $U \times V = V \times U$, alors
$$U \times V^{-1} = V^{-1} \times U.$$
4. En déduire que $C^T = C^{-1}$.

MP2I **Sujet 3** — Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir matrices triangulaires, scalaires, élémentaires, antisymétriques et nilpotentes.
Démonstration : Inverse et opérations puis inverse d'une matrice d'ordre 2.

Exercice 1

1. Résoudre le système $\begin{cases} 5x+15y-35z+10t &= 5 \\ 2x+2y+z+2t &= 0 \\ 7x-7y-14z+7t &= -7 \\ 10x+70y-40z+10t &= 30 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 4\cos(\theta)\cos(\varphi) = \sqrt{6} \\ 4\sin(\theta)\sin(\varphi) = \sqrt{2} \end{cases}$ d'inconnue $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^3. En déduire une expression de A^3 en fonction de A.
2. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer le polynôme Q tel que $Q(X+1) = X^3 + 6X$.
4. Que vaut $Q(A+I)$?
5. En déduire que $I+A$ est inversible et calculer sa matrice inverse.