EXERCICE 34 analyse

Énoncé exercice 34

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soient B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Corrigé exercice 34

On note $|| \ ||$ la norme sur E.

1. Soit A une partie non vide de E.
   $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a.
   $\forall\, r > 0$, $B_0(a, r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r.

   Soit $a \in E$.
   $a \in \bar{A} \iff \forall\, V \in \mathcal{V}(a),\ V \cap A \neq \emptyset$.
   Ou encore :
   $a \in \bar{A} \iff \forall\, r > 0,\ B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

2. Soit $x \in \overline{A}$.
   Prouvons que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Par hypothèse, $\forall\, r > 0,\ B_0(a, r) \cap A \neq \emptyset$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_0(x, \dfrac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.
   C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, x_n \in B_0(x, \dfrac{1}{n}) \cap A$.
   On fixe alors, pour tout entier naturel n non nul, un tel x_n.
   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans A et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||x_n - x|| < \dfrac{1}{n}$.
   C'est-à-dire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.

   Soit $x \in E$. On suppose que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Prouvons que $x \in \bar{A}$.
   Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $B_0(x, \varepsilon) \subset V$.
   On fixe un tel ε strictement positif.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ donc $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow ||x_n - x|| < \varepsilon$.
   On fixe un tel entier N.
   Donc, comme (x_n) est à valeurs dans A, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in B_0(x, \varepsilon) \cap A$.
   Or $B_0(x, \varepsilon) \subset V$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in V \cap A$, c'est-à-dire $V \cap A \neq \emptyset$.
   On peut en conclure que $x \in \bar{A}$.

3. $\bar{A} \subset E$ et $0_E \in \bar{A}$ car $0_E \in A$ et $A \subset \bar{A}$.
   Soit $(x, y) \in \left(\bar{A}\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   D'après 1., Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A convergeant respectivement vers x et y.
   On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$.
   Or A est un sous-espace vectoriel de E et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in A^2$, donc $x_n + \lambda y_n \in A$.
   On en déduit que la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers $x + \lambda y$.
   On a bien $x + \lambda y \in \bar{A}$.

4. On a les équivalences suivantes, pour tout $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \overline{A \times B} &\iff \exists((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (A\times B)^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (x,y) \\
&\iff \exists((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in A^{\mathbb{N}} \times B^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} y_n = y \\
&\iff \left(\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x\right) \text{ et } \left(\exists(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} y_n = x\right) \\
&\iff x \in \bar{A} \ \text{ et } \ y \in \bar{B} \\
&\iff (x,y) \in \bar{A} \times \bar{B}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité d'ensembles $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

EXERCICE 37 analyse

Énoncé exercice 37

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Corrigé exercice 37

1. (a) Prouvons que N_∞ est une norme sur E.
   $\forall\, f \in E$, $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.
   Alors, $\forall\, t \in [0,1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.

   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$. Comme $|\lambda| \geq 0$, on a par positive homogénéité de la borne supérieure
   $N_\infty(\lambda f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |\lambda f(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)| = |\lambda| N_\infty(f)$.
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall\, t \in [0,1]$,$|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   Donc $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

   On en déduit que N_∞ est une norme.

   Prouvons que N_1 est une norme sur E.
   $\forall\, f \in E$, $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$.
   Or $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc $|f|$ est nulle.
   C'est-à-dire $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
   $N_1(\lambda f) = \displaystyle\int_0^1 |\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| N_1(f)$.
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall\, t \in [0,1]$, $|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. Donc, par linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$.

   On en déduit que N_1 est une norme sur E.

   (b) $k = 1$ convient car, $\forall\, f \in E$, $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)\mathrm{d}t = N_\infty(f)$.

   (c) L'application identité de E, muni de la norme N_∞, vers E, muni de la norme N_1, est continue car linéaire et vérifiant $\forall\, f \in E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que :
   un ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
   On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour $f_n(t) = t^n$, on a $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.
   Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

EXERCICE 75 algèbre

Énoncé exercice 75

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Corrigé exercice 75

1. On note χ_A le polynôme caractéristique de A.
   On obtient, après calculs, $\chi_A = (X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp}A = \{1\}$.
   Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_2, donc égale à I_2.
   Ce n'est visiblement pas le cas et donc A n'est pas diagonalisable.
2. $\chi_A(X)$ étant scindé, A est trigonalisable. $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   Pour $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$ (choisi de sorte que $f(v_2) = v_2 + v_1$) on obtient une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   Le système différentiel étudié équivaut à l'équation $X' = AX$ qui équivaut encore , grâce à la linéarité de la dérivation, à l'équation $Y' = TY$.
   Cela nous amène à résoudre le système $\begin{cases} a' = a + b \\ b' = b \end{cases}$ de solution générale $\begin{cases} a(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mu t \mathrm{e}^t \\ b(t) = \mu \mathrm{e}^t \end{cases}$
   Enfin, par la relation $X = PY$ on obtient la solution générale du système initial :
   $\begin{cases} x(t) = \left((2\lambda - \mu) + 2\mu t\right) \mathrm{e}^t \\ y(t) = (-\lambda - \mu t) \mathrm{e}^t \end{cases}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque

$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \to x$$

avec $u_n \in \mathcal{D}$, la partie $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Supposons que f s'annule en 0 et 1.

$$\frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = f(0)$$

donc la fonction$f$ est impaire.
Par récurrence double, montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 0$.
Pour $n = 0$ ou $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 1$ et $n - 1 \geq 0$.

$$\frac{f(n+1) + f(n-1)}{2} = f(n)$$

donne en vertu de l'hypothèse de récurrence : $f(n+1) = 0$.
Récurrence établie.

Par l'imparité

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f(p) = 0$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons

$$\forall p \in \mathbb{Z}, f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$$

Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$,

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(0 + \frac{p}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \underset{HR}{=} 0$$

Récurrence établie.
Puisque f est continue et nulle sur une partie

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

dense dans $\mathbb{R}$, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

c) Posons $\beta = f(0)$ et $\alpha = f(1) - \beta$.
La fonction $g: x \mapsto f(x) - \alpha x + \beta$ est continue et vérifie la propriété

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$$

donc g est nulle puis f affine.

a) Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Sinon :
Posons $y = \frac{x}{N_1(x)}$. On a $y \in B_1 \subset B_2$ donc $N_2(y) \leqslant 1$ d'où $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.
De manière symétrique $N_1(x) \leqslant N_2(x)$ puis l'égalité.
b) On reprend la démarche ci-dessus à partir de

$$y = \frac{x}{N_1(x) + \varepsilon}$$

avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir $N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon$ avant de faire tendre ε vers 0.

1. On calcule le polynôme caractéristique de f. On trouve $P_f(X)=(1-X)^2(2-X)$. Puisqu'il a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, l'endomorphisme f est trigonalisable.
2. Pour $u=(x,y,z)$, on a

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & x \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$.
3. On a $f(v)=(1,1,1)$ d'où $f(v)-v=u$.
4. On cherche l'espace propre associé à la valeur propre 2. On a, pour $w=(x,y,z)$,

$$f(w)=2w \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+z & = & 0 \\ -x+z & = & 0 \\ x-y-z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & 0 \\ z & = & x \end{array}\right.$$

Le vecteur $w=(1,0,1)$ est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. On vérifie facilement que la famille (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, donc une base. La matrice de f dans cette base est donnée par

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^3$ est scindé donc A est trigonalisable.
On a

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

et puisque

$$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Notons A la matrice étudiée.
Après calcul, son polynôme caractéristique est $\chi_A = (X-9)^3$.
Celui-ci est scindé et par conséquent la matrice A est trigonalisable.
Après résolution

$$E_9(A) = \text{Vect}\,(1, 1, -1/2)$$

$\dim E_9(A) = 1$ et $X_1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & -1/2\end{pmatrix}$ est vecteur propre. Complétons ce vecteur en une base et considérons la matrice de passage associée

$$P = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1/2&0&1\end{pmatrix}$$

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}9&-5&-2\\0&12&-6\\0&3/2&6\end{pmatrix}$$

Considérons alors la sous matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

de polynôme caractéristique $(X-9)^2$ car $\chi_A(X) = (X-9)\chi_{A'}(X)$. Après résolution

$$E_9(A') = \mathrm{Vect}(1, 1/2)$$

Considérons la matrice de passage

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$(P'^{-1})A'P' = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Enfin, pour

$$Q = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$