MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Trigonalisation de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1

Banque CCINP : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 2

Soit f une une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Montrer que $\left\{\frac{p}{2^n} \text{ avec } (p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.
3. Conclure que f est une fonction affine.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 11 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Calcul de la dimension d'un sous-espace caractéristique.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n) = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soient B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 2

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note :

$$B_1 = \{x \in E \text{ tel que } N_1(x) \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad B_2 = \{x \in E \text{ tel que } N_2(x) \leqslant 1\}.$$

1. Aucun rapport : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable puis trigonaliser A.
2. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.
3. Même question avec les boules unités ouvertes.

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit f un endomorphisme nilpotente d'indice n de E (espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$). Montrer qu'il existe une de la forme $(x, f(x), \cdots, f^{[n-1)}(x))$ avec....

Exercice 1

Banque CCINP : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. A est-elle trigonalisable ?
3. Trigonaliser A.
4. Même question avec $B = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.