

COLLES DE MATHÉMATIQUES**Mini question de cours**

Fonction de répartition : définition, propriété ?

Exercice 1

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad u(P) = (X^2 + 1)P'' + 2XP'$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que 1 et X sont des vecteurs propres de u .
3. Montrer que 6 est une valeur propre de u .
4. u admet-il d'autres valeurs propres ? Déterminer les sous-espaces propres de u .
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 2

Soient b et r deux entiers naturels non nuls. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n fois une boule avec remise et on note P_n la probabilité pour que le nombre de boules rouges soit pair. Pour tout entier naturel non nul n , montrer que :

$$P_n = \frac{b-r}{b+r}P_{n-1} + \frac{r}{b+r} \text{ puis expliciter } (P_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Loi de Poisson : loi, espérance, variance ?

Exercice 1

Une abeille va chaque jour sur une des deux fleurs A et B . Au jour 0, elle va à la fleur A . A chaque nouvelle journée, il y a une probabilité p (p élément de $]0, 1[$) qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier naturel n , on note A_n l'événement "L'abeille est sur la fleur A au jour n " (et a_n sa probabilité) et B_n l'événement "L'abeille est sur la fleur B au jour n " (et b_n sa probabilité). Expliciter les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et évaluer leur limite.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (X - a)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E . En déduire que f admet $n + 1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
3. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k .
 - (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
 - (b) On note r_k l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k , et Q_k tel que $P_k = (X - a)^{r_k} Q_k$. Déterminer r_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k .

Mini question de cours

Citer des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité

Exercice 1

Évaluer après l'avoir diagonaliser, pour tout entier naturel n , la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Exercice 2

Il y a huit caisses dans un magasin. On estime que N clients achètent chaque jour quelque chose dans ce magasin et que chacun choisit une caisse au hasard. On note A le nombre de client sortant par la caisse 1 aujourd'hui. On suppose que N est une variable aléatoire admettant une espérance.

1. Expliciter $P_{(N=n)}(A = k)$ avec k et n deux entiers naturels.
2. Soit n un entier naturel. Expliciter $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \frac{7^{n-k}}{8^n}$.
3. En déduire que $E(A) = \frac{E(N)}{8}$.
4. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ réel strictement positif). Déterminer la loi de A .