EXERCICE 21 analyse

Énoncé exercice 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Corrigé exercice 21

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
   Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
   $R = \sup\{r \geqslant 0\,/(a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

   On peut aussi définir le rayon de convergence de la manière suivante :

   $\exists\,!\, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
   i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
   ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
   R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

   Pour une série entière de la variable réelle, la définition est identique.
2. La série numérique $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = 1$.
   Donc $R \leqslant 1$. (*)

   De plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   Donc $1 \in \{r \geqslant 0\,/(a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
   Donc $R \geqslant 1$. (**)

   D'après (*) et (**), $R = 1$.
3. Notons R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = b_n$.
   Or $b_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ diverge.

   Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ diverge . (***)

   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = a_n \leqslant \sqrt{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$ car $\forall\, x \in [0, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. (****)

   D'après (***) et (****), on peut appliquer 2. et on en déduit que $R = 1$.

EXERCICE 22 analyse

Énoncé exercice 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Corrigé exercice 22

1. On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
   On note R le rayon de convergence de la série entière somme de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, c'est-à-dire le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

   On a toujours $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
   De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.

   Preuve :
   On suppose par exemple que $R_a \leqslant R_b$.

   Premier cas : $R_a = 0$.
   $R \geqslant 0 = \min(R_a; R_b)$.

   Deuxième cas : $R_a > 0$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b) = R_a$.
   Comme $|z| < R_a$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
   De même, comme $|z| < R_b$, alors $\sum b_n z^n$ converge absolument.
   De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|(a_n + b_n) z^n| \leqslant |a_n z^n| + [b_n z^n|$. (*)
   Or $\sum (|a_n z^n| + [b_n z_n|)$ converge car somme de deux séries convergentes.
   Donc, par critère de majoration pour les séries à termes positifs et en utilisant (*), on en déduit que $\sum |(a_n + b_n) z^n|$ converge, c'est-à-dire $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument.
   Donc $|z| \leqslant R$.
   On a donc prouvé que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| < R_a \Rightarrow |z| \leqslant R$.
   Donc $R \geqslant \sup([0, R_a[)$, c'est-à-dire $R \geqslant R_a = \min(R_a, R_b)$. (**)

   On suppose maintenant que $R_a \neq R_b$, c'est-à-dire $R_a < R_b$.

   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$.
   $|z| < R_b$, donc $\sum b_n z^n$ converge.
   $|z| > R_a$, donc $\sum a_n z^n$ diverge.
   Donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge (somme d'une série convergente et d'une série divergente).
   On en déduit que $|z| \geqslant R$.
   On a donc prouvé que $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $R_a < |z| < R_b \Rightarrow |z| \geqslant R$.
   Donc $R \leqslant \inf(]R_a, R_b[)$, c'est-à-dire $R \leqslant R_a = \min(R_a, R_b)$. (***)

   Donc, d'après (**) et (***), $R = \min(R_a, R_b)$.

2. **Pour** $|x| < 1$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

   Pour $|x| < \dfrac{1}{2}$, $\ln(1-2x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.

D'après 1., le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ vaut $\dfrac{1}{2}$.

Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Et, pour $|x|<\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$.

Pour $x=\dfrac{1}{4}$:
la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge en $\dfrac{1}{4}$.
De plus, la somme d'une série entière de la variable réelle est continue sur son intervalle ouvert de convergence.
Donc, comme $\left|\dfrac{1}{4}\right|<\dfrac{1}{2}$, alors $x\longmapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ est continue en $\dfrac{1}{4}$.

Pour $x=\dfrac{1}{2}$:
la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\dfrac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$) et d'une série divergente (série harmonique).

Pour $x=-\dfrac{1}{2}$:
la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge en $-\dfrac{1}{2}$ comme somme de deux séries convergentes.
En effet :
D'une part, $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\dfrac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.
D'autre part,
$\sum_{n\geqslant 1}-\dfrac{2^n}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=-\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien positive, décroissante et de limite nulle).

La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée par le théorème d'Abel radial.

Remarque :
Soit $\sum a_nx^n$ est une série entière de rayon $R>0$.
On note f la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

La version du théorème d'Abel radial au programme assure que :
si $\sum a_nR^n$ converge alors $\lim\limits_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n$.

En considérant la fonction la fonction $x\longmapsto f(-x)$ qui est la somme de la série entière $\sum(-1)^na_nx^n$ (de rayon R), on a immédiatement l'extension suivante :
si $\sum a_n\left(-R\right)^n$ converge alors $\lim\limits_{x\to -R^+}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(-R\right)^n$.

EXERCICE 23 analyse

Énoncé exercice 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.

Corrigé exercice 23

1. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (n+1)a_{n+1}$.
   Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
   Notons R' le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$.
   Par hypothèse, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$.
   Donc $R = \dfrac{1}{l}$ (*)
   avec $R = +\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$.
   De plus, $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \dfrac{n+2}{n+1} \times \dfrac{|a_{n+2}|}{|a_{n+1}|}$.
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = l$.
   Donc $R' = \dfrac{1}{l}$ (**).
   D'après (*) et (**), $R' = R$.
2. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in\,]-R,R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.
   Soit $r \in [0,R[$. On pose $D_r = [-r,r]$.
   i) $\sum f_n$ converge simplement sur D_r.
   ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_r .
   iii) $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R.
   En effet :
   $\sum f_n' = \sum n a_n x^{n-1} = \sum (n+1)a_{n+1}x^n$ et donc, d'après 1., $\sum f_n'$ a pour rayon de convergence R.

   Donc, d'après le cours, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $]-R,R[$, donc converge uniformément sur D_r.

   On en déduit que $\forall\, r \in [0,R[$, $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_r.
   Donc, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$.

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1) / k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m \in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1 - z}$$

Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geqslant 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leqslant 1$ $d(n) \leqslant n$ et le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} nz^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geqslant 1$. On peut conclure $R_d = 1$.

La suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.
On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1, 1[$$

a) $u_n(z) = \frac{n^2+1}{3^n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \to \frac{|z|}{3}$ donc $R = 3$.
b) $u_n(z) = z^n \mathrm{e}^{-n^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n^2 u_n(z) \to 0$ donc $R = +\infty$.
c) $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \to |z|^2$ donc $R = 1$.
d) $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n} |z|^3 \to \mathrm{e}\,|z|^3$ donc $R = \mathrm{e}^{-1/3}$.

a) $u_n(z) = n! z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = (n+1)|z| \to +\infty$ donc $R = 0$.
b) $u_n(z) = \binom{2n}{n} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z| \to 4|z|$ donc $R = 1/4$.
c) $u_n(z) = \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z| \to 27|z|$ donc $R = 1/27$.
d) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$ or $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$ donc $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.
Par suite $R = 1$.

a) Posons

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
b) Posons $a_n = \sin n$.
(a_n) ne tend par vers 0 donc $R \leqslant 1$ mais (a_n) est borné donc $R \geqslant 1$. Finalement $R = 1$.
c) Posons $a_n = (\sin n)/n^2$.
(a_n) est bornée donc $R \geqslant 1$.
Pour $|z| > 1$, la suite $\left(\frac{\sin n}{n^2} |z|^n\right)_{n \geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 car la suite $(\sin n)$ ne tend pas vers 0. On en déduit $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$.
Pour $|z| < \sqrt{R}$, $|z^2| < R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est absolument convergente.
Pour $|z| > \sqrt{R}$, $|z^2| > R$ et donc $\sum a_n (z^2)^n = \sum a_n z^{2n}$ est grossièrement divergente.
On en déduit $R' = \sqrt{R}$.

Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut

$$R' = R^2$$

Soit $|z| < R$.
Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \to 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$.
Or pour $|Z| > R'$, on sait que la suite $(a_n^2 Z^n)$ n'est pas bornée. On en déduit $|z|^2 \leqslant R'$ et donc

$$R \leqslant \sqrt{R'}$$

Soit $|z| < \sqrt{R'}$.
On a $|z|^2 < R'$ et donc $|a_n^2 z^{2n}| \to 0$ puis $|a_n z^n| \to 0$. On en déduit $|z| \leqslant R$ et donc

$$\sqrt{R'} \leqslant R$$

a) On a $|b_n| \leqslant |a_n|$ donc $R' \geqslant R$. On a $|b_n| \leqslant 1$ donc $R' \geqslant 1$
b) Si $R' > 1$ alors $b_n \to 0$ et puisque $|b_n| = \frac{|a_n|}{1+|a_n|}$ donne $|a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|}$, on obtient $a_n = O(|b_n|)$ donc $R \geqslant R'$.
Par suite $R = R'$ d'où $R' = \max(1, R)$.
c) Si $R' = 1$ alors $1 \geqslant R$ et $R' = \max(1, R)$.