MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec α dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.

   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 2

Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n, \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}, \sum_{n\geqslant 0} z^{n^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\alpha)}{n} z^n$$

   avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^{2n+1}}$ avec z un complexe tel que $|z|<1$.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Convergence et somme de la série entière réelle

$$\sum \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f \; : \; x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$. La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$? En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Exercice 2

Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n, \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n, \sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

avec a_n la n-ième décimale de $\sqrt{3}$.

2. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ et de $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$.

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 12 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Déterminer le développement en série entière de arcsin.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

Exercice 2

Les deux questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}.$$
On note R' le rayon de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.
   (a) Montrer que $R' \geqslant 1$ et $R' \geqslant R$.
   (b) Montrer que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
   (c) Exprimer alors R' en fonction de R.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_{n\geqslant 0} n!z^n, \sum_{n\geqslant 0} \sin(n)z^n, \sum_{n\geqslant 0} \sin(e^{-n})z^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} d(n)z^n$$
avec $d(n)$ le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier naturel n.