MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 11

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Limite et somme des suites arithmétiques
Démonstration: Théorème de la limite monotone.

Exercice 1

Soit x un réel. Donner les natures des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n}.$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$x_0 = \left|\frac{\sqrt{a}}{2} - 1\right| \text{ et } x_1 = \left|\frac{\sqrt{b}}{2} - 1\right| \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$
4. Expliciter $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 11

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Explicitation des suites récurrentes linéaire d'ordre 2
Démonstration: Les suites adjacentes.

Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1. $y_0 = 0,\ y_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2y_n = y_{n+1} + y_{n-1}$.
2. $x_0 = 1,\ x_1 = e$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}^2 = x_{n+2}x_n$.
3. $w_0 = 11,\ w_1 = 25$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n = 20$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Étudier $f : x \mapsto \dfrac{x + x^2}{2}$ et en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$
2. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L, alors $L = 0$ ou $L = 1$.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Procéder de même avec la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = |a|$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.

MP2I **Sujet 3** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 11 | cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Définition et QC

Définition/ Explication: Citer le théorème des gendarmes et de passage à la limite dans les inégalités
Démonstration: Explicitation des suites arithmético-géométriques.

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0,1]$ et, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier $f : x \mapsto x - x^2$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel k de $]0,1[$ tels que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite nulle.
2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers a et b deux réels. Montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0}{n+1}\right) = ab.$$
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n) = 1.$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que leur limite vaut 1.

MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 11 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Limite et somme des suites géométriques
Démonstration : Théorème de la limite monotone.

Exercice 1

Soit x un réel. Donner les natures des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n},\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n}.$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ par $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = \left(\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a,\quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$ avec $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x_0 = \left|\frac{\sqrt{a}}{2} - 1\right| \text{ et } x_1 = \left|\frac{\sqrt{b}}{2} - 1\right| \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

4. Expliciter $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$.
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 11

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Illustration graphique des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$...
Démonstration : Explicitation des suites arithmético-géométriques.

Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1. $y_0 = 11$, $y_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n non nul, $4y_n = y_{n+1} - 12y_{n-1}$.
2. $x_0 = \exp(11)$, $x_1 = \exp(25)$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2}^2 = x_{n+1}^3 \times x_n^2$.
3. $w_0 = 11$, $w_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n, $2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n = 4$.

Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 quelconque et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Étudier $f : x \mapsto \dfrac{x + x^2}{2}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. En déduire, en fonction de u_0, la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L, alors $L = 0$ ou $L = 1$.
4. En déduire, en fonction de u_0, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 11 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner la définition de $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n)=5$ avec des quantificateurs.
Démonstration : Les suites adjacentes.

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0\in[0,1]$ et, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n-u_n^2$.

1. Étudier $f : x\mapsto x-x^2$ et en déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel k de $]0,1[$ tels que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}|\leqslant k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite nulle.
2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers a et b deux réels. Montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{n+1}\right)=ab.$$
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n)=1.$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que leur limite vaut 1.