BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Densité et espérance d'une variable suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Exercice 1

Soient k un réel et f la fonction : $f : x \mapsto k\exp(-|x|)$.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de k pour laquelle f est une densité de probabilité. On suppose désormais que k prend cette valeur et on note X une variable aléatoire réelle de densité f.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, calculer la.
4. Calculer $P(-1 < X \leqslant 2)$ et $P_{(X \geqslant -1)}(X < 2)$.

Exercice 2

Soient X_1, X_2, ..., X_n n (n entier supérieur à 2) variables aléatoires indépendantes et suivant toute une loi normale centrée réduite. Donner la loi de X_1^2 puis de $X_1^2 + X_2^2$ et enfin de $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. *(Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution)*

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Densité, espérance et variance d'une variable suivant une loi exponentielle.

Exercice 1

X désigne dans cet exercice une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de moyenne 2.

1. Déterminer la loi et l'espérance de Y avec $Y = X^2$.
2. Trouver la probabilité pour que l'équation $b^2 - 2bY + 1 = 0$, d'inconnue b réel, ait deux racines réelles.

Exercice 2

Jean-Claude, émérite sauteur de haies, se lance dans sa course habituelle de 110 m haies (10 haies jalonnent cette course). Sans renverser de haies, il met X secondes avec X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 13 et $0,2$. Pour chaque haie, il a une probabilité de $0,1$ de la renverser et cela lui fait perdre $0,2$ s. On suppose que ses différents sauts sont indépendants. Évaluer la probabilité que Jean-Claude batte le record du monde (actuellement de $12,8$ s détenu par Aries Merritt).

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Densité, espérance et variance d'une variable suivant une loi normale.

Exercice 1

Soit Z une variable aléatoire de densité f avec f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Prouver que Z est bien définie et déterminer sa fonction de répartition F.
2. Soit x un réel positif, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt$ (penser à un changement de variable) .
3. Z admet-elle une espérance ? La calculer si oui. (Même question avec la variance)
4. Dans une usine, on suppose que la variable aléatoire égale au temps de fabrication, exprimé en minutes, d'un pièce sur une chaîne de fabrication suit la même loi que Z.
   (a) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit supérieur à deux minutes.
   (b) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit inférieur à trois minutes.
   (c) La fabrication d'une pièce est commencée depuis deux minutes exactement lorsque se présente le responsable de la production. Quelle est alors la probabilité que la pièce soit terminée moins d'une minute après son arrivée ?

Exercice 2

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles, respectivement de paramètres λ et μ avec λ et μ deux réels strictement positifs et distincts.Déterminer la loi de $X+Y$ *(Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution).*
2. Soient X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et Y suivant la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY.