a) Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

b) Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si, et seulement si, $\alpha > 2$.

c) Posons $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k\geqslant 0} |u_{k,n}|$ converge et $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}|$ converge donc on peut appliquer la formule de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$$

avec convergence des séries sous-jacentes.

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Notons que les termes sommés sont positifs.

Pour chaque $q \in \mathbb{N}^\star$, la série $\sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}$.

Par télescopage

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}\right) = \frac{1}{q^2}$$

La série $\sum_{q\geqslant 1}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q\geqslant 1} \frac{1}{q^2}$ converge aussi, on peut donc affirmer que la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star}$$

est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2p}\right)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^2-p^2} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-1} + \cdots + 1 + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right)$$

donc

$$\sum_{n=1, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} > 0$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4n^2} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$$

On en déduit que la familles des $1/(n^2-p^2)$ avec $(p,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $p \neq n$ n'est pas sommable.

Par produit de Cauchy de série convergeant absolument

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{3^m}\right) = \frac{9}{4}$$

a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$ et donc (v_n) est bornée par un certain M.
On a $|u_k v_{n-k}| \leqslant M\,|u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $\left(|u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc, par sommation par paquets, la famille $(u_k v_{n-k})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable.
Par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}| < +\infty$$

Puisque

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}|$$

on a obtient $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} v_\ell$$

c) On a

$$(u \star v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v \star u)_n$$

et

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u \star (v \star w))_n$$

Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u \star \varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.
d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.
Si u est inversible et v son inverse, la relation $u \star v = \varepsilon$ donne
$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}$.
Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. De même pour tout $n < 0$, $v_n = 0$
Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.
L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ n'est pas un groupe.

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^\star$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1)/k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}$$

Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Etudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geqslant 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.

$d(n) \not\to 0$ donc $R_d \leqslant 1$ $d(n) \leqslant n$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} n z^n$ étant égal à 1 on a aussi $R_d \geqslant 1$. On peut conclure $R_d = 1$.

La suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x = 1$, il en est de même pour $x = -1$.
On conclut que l'intervalle cherché est

$$]-1, 1[$$