MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Citer (sans démonstration) le théorème de sommation par paquets, version positive.

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Existence et valeur de :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}.$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille suivante soit sommable :
$$\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^\star)^2}.$$

Exercice 2

1. Soit p un entier supérieur à 1. Justifier que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^\star \text{avec } n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4p^2}$.
2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}^\star \text{avec } n\neq p}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p\in\mathbb{N}^\star \text{avec } p\neq n}\frac{1}{n^2-p^2}$.
3. Que peut-on en déduire ?

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Citer (sans démonstration) le théorème de Fubini avec famille positive.

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Existence et valeur de :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}.$$

2. Justifier l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1) = \frac{1}{2}$ avec $\displaystyle\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^n}$.

Exercice 2

1. Soit α un réel, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ existe-t-elle ?
2. En cas d'existence, comparer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 13 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Citer (sans démonstration) le théorème de Fubini avec famille sommable.

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1.(a) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ définie par : $f : k \mapsto \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\dfrac{k+1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$. Montrer que f est bijective et en déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

(b) Démontrer que $\mathbb{N}^*$ et $2\mathbb{N}$ sont dénombrables.

2.(a) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}\right)$.

(b) Calculer $\displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}\right)$.

(c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

On note $\ell(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes sommables. Soient u et v deux éléments de $\ell(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que pour tout entier n, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On pose $(u \star v)_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u \star v$ est une suite complexe sommable et que :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u\star v)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n.$$
3. Montrer que la loi $\star$ ainsi définie est commutative, associative et possède un neutre.
4. $(\ell(\mathbb{Z}), \star)$ est-il un groupe ?