MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 12 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir les suites extraites et citer le théorème de Bolzano-Weiersrass
Démonstration: Unicité de la limite.

Exercice 1

Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ suite définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

1. $u_{1,n} = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}$
2. $u_{2,n} = \dfrac{2^n - 3^n + \sin(n)}{2^n+3^n}$
3. $u_{3,n} = \ln(n+1) - \ln(n)$
4. $u_{4,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{n}$

Exercice 2

On définit les suites $(H_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$, $(u_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$ par :

$$(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (H_n - \ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

1. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite $(H_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$.
3. Montrer que, pour tout entier réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$
5. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
6. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(H_{2n} - H_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner la définition de $\lim_{n\mapsto+\infty}(u_n) = +\infty$ avec des quantificateurs.

Démonstration: $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: lien avec la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On va établir de deux façons différentes la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite bornée vérifiant : $a_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer le résultat dans le cas où on a une égalité.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel b. On pose $a = \dfrac{3}{5}b$.
   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $|a_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{2}{3}|a_n - a| + \dfrac{\varepsilon}{6}$ à partir d'un certain rang.
   (c) En déduire la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On va établir à nouveau ce résultat. On pose $c_0 = c$, avec c la limite d'une suite extraite convergente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $c_{n+1} = \dfrac{3}{2}(b - c_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée, expliciter $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conclure !

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 12 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Explicitation des suites récurrentes linéaire d'ordre 2
Démonstration: Limite d'une somme de suites réelles convergentes, de produit de suites réelles convergentes.

Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1. $x_0 = 3,\ x_1 = 5$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.
2. $y_0 = 1,\ y_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ 9y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$.
3. $t_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} = 2t_n$.
4. $u_0 = e^3,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée puis convergente. On note L sa limite.
4. Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{\exp(2^n L)}\right) = 1$.

MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 12 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Illustration graphique des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$...
Démonstration : Unicité de la limite.

Exercice 1

Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ suite définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

1. $u_{1,n} = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2n}$
2. $u_{2,n} = \dfrac{2^n - 3^n + \sin(n)}{2^n + 3^n}$
3. $u_{3,n} = \ln(n + 1) - \ln(n)$
4. $u_{4,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k + 1}{n}$

Exercice 2

On définit les suites $(H_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$, $(u_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$ par :

$$(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (H_n - \ln(n + 1))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

1. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite $(H_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$.
3. Montrer que, pour tout entier réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$
5. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
6. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(H_{2n} - H_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}^\star}$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Théorème de minoration, majoration, passage à la limite dans les inégalités
Démonstration : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: lien avec la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On va établir de deux façons différentes la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite bornée vérifiant : $a_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer le résultat dans le cas où on a une égalité.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel b. On pose $a = \dfrac{3}{5}b$.
   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $|a_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{2}{3}\,|a_n - a| + \dfrac{\varepsilon}{6}$ à partir d'un certain rang.
   (c) En déduire la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On va établir à nouveau ce résultat. On pose $c_0 = c$, avec c la limite d'une suite extraite convergente de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $c_{n+1} = \dfrac{3}{2}(b - c_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée, expliciter $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conclure !

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 12 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner la définition de $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n) = -\infty$ avec des quantificateurs.
Démonstration : Limite d'une somme de suites réelles convergentes, de produit de suites réelles convergentes.

Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1. $x_0 = 3$, $x_1 = 5$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.
2. $y_0 = 1$, $y_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ 9y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$.
3. $t_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} = 2t_n$.
4. $u_0 = e^3$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n).$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée puis convergente. On note L sa limite.
4. Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\exp(2^n L)}\right) = 1$.