BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Densité et espérance d'une variable suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Exercice 1

Soit $F : x \mapsto \left(1 - \exp\left(-\frac{2x}{3}\right)\right) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.

1. Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable à densité.
2. Déterminer une densité de probabilité de X, une variable aléatoire dont F est la fonction de répartition.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Déterminer $P(|X - 2| \leqslant 4)$.

Exercice 2

Soient X_1, X_2, ..., X_n n (n entier supérieur à 2) variables aléatoires indépendantes et suivant toute une loi normale centrée réduite. Donner la loi de X_1^2 puis de $X_1^2 + X_2^2$ et enfin de $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. *(Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution)*

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Densité, espérance et variance d'une variable suivant une loi exponentielle.

Exercice 1

X désigne dans cet exercice une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de moyenne 2.

1. Déterminer la loi et l'espérance de Y avec $Y = X^2$.
2. Trouver la probabilité pour que l'équation $b^2 - 2bY + 1 = 0$, d'inconnue b réel, ait deux racines réelles.

Exercice 2

Une usine a une chaîne de montage avec n machines qui travaillent en parallèle. On commence à fabriquer des objets à l'instant 0. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note X_i le temps de fabrication d'un objet sur la i-ème machine et on suppose que X_i suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Lorsque l'objet est fabriqué, la machine s'arrête. Soient t un élément de $[0; 1]$ et N_t le nombre d'objet fabriqués à l'instant t.

1. Reconnaître la loi de N_t.
2. Pour tout entier naturel non nul k, on note T_k le temps nécessaire à la fabrication de k objets.
   (a) Relier $(T_k \leqslant t)$ et $(N_t \geqslant k)$.
   (b) En déduire que T_k est une variable à densité.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Densité, espérance et variance d'une variable suivant une loi normale.

Exercice 1

Soit Z une variable aléatoire de densité f avec f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Prouver que Z est bien définie et déterminer sa fonction de répartition F.
2. Soit x un réel positif, calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3}\, dt$ (penser à un changement de variable) .
3. Z admet-elle une espérance ? La calculer si oui. (Même question avec la variance)
4. Dans une usine, on suppose que la variable aléatoire égale au temps de fabrication, exprimé en minutes, d'un pièce sur une chaîne de fabrication suit la même loi que Z.
   (a) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit supérieur à deux minutes.
   (b) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit inférieur à trois minutes.
   (c) La fabrication d'une pièce est commencée depuis deux minutes exactement lorsque se présente le responsable de la production. Quelle est alors la probabilité que la pièce soit terminée moins d'une minute après son arrivée ?

Exercice 2

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles, respectivement de paramètres λ et μ avec λ et μ deux réels strictement positifs et distincts.Déterminer la loi de $X+Y$ *(Demander au gentil M Bacquelin de vous rappeler la formule du produit de convolution).*
2. Soient X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et Y suivant la loi uniforme sur $\{-1;1\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY.