MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Théorème de la limite monotone (en proba!).

Exercice 1

Banque CCINP : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet» et on pose $P(A_n) = a_n$ (puis de même B_n, C_n, b_n, c_n...).

1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le s.e.p. associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. **Remarque** : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n. **Remarque** : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 2

Un magasin possède n caisses. Les clients se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les n caisses. Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement "il y a k clients dans le magasin" et on suppose que $P(A_k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Commentez l'expression de $P(A_k)$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$, calculer $P(B_m)$un entier naturel avec B_m l'événement "m clients sortent par la caisse 1".
3. La caisse 1 a vu passé m (m entier naturel) clients un jour donné. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu dans le magasin nm clients ?

Question de cours

Formules de Bayes, des probabilités composées et des probabilités totales.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (p_n)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

Soit $p \in]0;1[$. Un dimanche après-midi particulièrement maussade, Gösta Mittag-Leffler décide de jouer à un jeu de pile ou face selon la règle suivante : il effectue une succession de tirages (indépendant les uns des autres et ayant une probabilité p de retourner le résultat "pile") ; s'il arrive un moment où il obtient deux " pile" de plus que de "face", alors il a gagné et peut rendre visite à la maîtresse d'Alfred Nobel ; si en revanche il obtient deux " face" de plus que de "pile", alors il a perdu et doit désherber son jardin.

1. Montrer que si la partie se termine alors on a effectué un nombre pair de lancers.
2. A l'instant n (n entier naturel non nul), on note Δ_n la différence entre le nombre de piles obtenus et le nombre de faces. Ainsi, la partie se termine dès que $\Delta_n = \pm 2$. On note A_n l'événement : «La partie n'est pas terminée à l'issue du lancer n.» Décrire l'événement A_{2n} à l'aide des éléments $(\Delta_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$.
3. Pour $n \geqslant 1$. Déterminer $\mathrm{P}(A_{2n})$.
4. Quelle est la probabilité que Gösta passe finalement un dimanche agréable ?

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 14 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définition d'une mesure de probabilité et inégalité concernant la probabilité d'une réunion dénombrable ?

Exercice 1

Banque CCINP : On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :

- L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
- L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Un étudiant doit répondre à une question à choix multiple où cinq réponses sont proposées, une seule étant correcte. Quand l'événement A : "l'étudiant a bien travaillé" est réalisé, la réponse fournie est la bonne réponse. Dans le cas contraire l'étudiant répond au hasard. Calculer la probabilité $P_B(A)$ (en appelant B l'événement : " la réponse fournie est correcte"). Faire de même avec n questions (n entier naturel non nul) et commenter.
2. On considère deux pièces de monnaie A et B. La probabilité que la pièce A fasse pile est $a \in]0;1[$. La probabilité que la pièce B fasse pile est $b \in]0;1[$. On commence avec la pièce A et l'on joue à pile ou face. Si l'on tire face, on change de pièce. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la probabilité que l'on joue la pièce A au n-ième coup, et p_n la probabilité que l'on fasse pile au n-ième coup. Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis étudier la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.