EXERCICE 101 probabilités

Énoncé exercice 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Corrigé exercice 101

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
   $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$.
   donc $a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
   (b) De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.
   (b) $A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg}\left(A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = 1$.
   Donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2$.
   L'expression de $A + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ donne immédiatement que $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   (c) Puisque $\operatorname{tr}(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 1.
   A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3 = E_{-\frac{1}{2}}(A) \overset{\perp}{\oplus} E_1(A)$, donc que $E_1(A) = \left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$.

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

En posant $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1/2 & 0\\0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$, on a alors $D = P^{-1}AP$.

3. D'après la question 1., $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$

Et donc on prouve par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$

Or $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

Donc $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}$

Or, d'après l'énoncé, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ donc :

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0\\0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

EXERCICE 105 probabilités

Énoncé exercice 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 105

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   Alors, $\forall\, i_0 \in I$, $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$.

   Preuve : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i0}}(B)}{P(B)}$. (1)

   Or $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements donc $P(B) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$.

   Donc $P(B) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$. (2).

   (1) et (2) donnent le résultat souhaité.
2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.

   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

   On pose $A = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

Donc $p_n = \dfrac{\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \times \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

