MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition d'un groupe
Démonstration: Composée (en cas d'existence) de deux injections, surjections, bijections...

Exercice 1

On considère deux groupes G et G' et une application $\varphi : G \mapsto G'$. On définit l'ensemble :

$$H = \{ (x, \varphi(x)); x \in G \}$$

Montrer l'équivalence :

$$\varphi \text{ morphisme } \iff H \text{ sous-groupe de } G \times G'.$$

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E et les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cap A \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cup A \end{cases}.$$

1. On suppose uniquement dans cette question que $A \neq E$. Il existe donc un élément a de E tel que $a \notin A$.
   (a) Déterminer $f(\{a\})$ et $f(\varnothing)$.
   (b) Le sous-ensemble $\{a\}$ admet-il un antécédent par f?
   (c) f est-elle injective, surjective ?
2. f est-elle injective, surjective ?
3. g est-elle injective, surjective ?

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 13 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition d'un morphisme de groupe
Démonstration: Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1

1. Montrer que $\{2^n 3^m, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni de la multiplication est un groupe.
2. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe avec E un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne $\star$ associative telle que :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad \exists (x,y) \in E^2,\ b = a \star x = y \star a.$$

Exercice 2

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = \ln\left(\frac{1-x^2}{1+y}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
3. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction $g : t \mapsto f(0,t)$ et étudier ses variations sur D_g (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application $f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir les relations d'ordre
Démonstration: Si f est bijective, f^{-1} l'est et si $f \circ g$ est bijective alors $(f \circ g)^{-1}$ est ... .

Exercice 1

On considère la loi de composition interne $\star$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad a \star b = a + (-1)^a b.$$

1. $\star$ est-elle commutative ?
2. Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe.
3. Expliciter x^{-1} quand $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit E un ensemble. Si X et Y sont deux parties de E, on note $X \triangle Y$ la partie de E définie par :

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$

1. (a) Faire un dessin représentant X et Y et hachurer la partie $X \triangle Y$ de E.
   (b) Montrer : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, $X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et f_A l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \; f_A(X) = X \Delta A.$$

   (a) Montrer : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $(X \Delta A) \Delta A = X$. Que cela signifie-t-il sur l'application $f_A \circ f_A$?
   (b) En déduire que f_A est bijective et expliciter la bijection réciproque f_A^{-1}.

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Définition d'un anneau
Démonstration : Composée (en cas d'existence) de deux injections, surjections, bijections...

Exercice 1

On considère deux groupes G et G' et une application $\varphi : G \mapsto G'$. On définit l'ensemble :

$$H = \{ (x, \varphi(x)); x \in G \}$$

Montrer l'équivalence :

$$\varphi \text{ morphisme } \iff H \text{ sous-groupe de } G \times G'.$$

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E et les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cap A \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cup A \end{cases}.$$

1. On suppose uniquement dans cette question que $A \neq E$. Il existe donc un élément a de E tel que $a \notin A$.
   (a) Déterminer $f(\{a\})$ et $f(\varnothing)$.
   (b) Le sous-ensemble $\{a\}$ admet-il un antécédent par f?
   (c) f est-elle injective, surjective ?
2. f est-elle injective, surjective ?
3. g est-elle injective, surjective ?

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Injection : définition, illustration d'une injection, d'une non injection
Démonstration : Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1

1. Montrer que $\{2^n 3^m, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni de la multiplication est un groupe.
2. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe avec E un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne $\star$ associative telle que :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad \exists (x,y) \in E^2,\ b = a \star x = y \star a.$$

Exercice 2

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+y}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
3. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction $g : t \mapsto f(0,t)$ et étudier ses variations sur D_g (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application $f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$ est-elle injective ? surjective ? Justifier.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir les relations binaires, les relations transitives et les relations antisymétriques.
Démonstration : Si f est bijective, f^{-1} l'est et si $f \circ g$ est bijective alors $(f \circ g)^{-1}$ est ... .

Exercice 1

On considère la loi de composition interne $\star$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad a \star b = a + (-1)^a b.$$

1. $\star$ est-elle commutative ?
2. Montrer que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe.
3. Expliciter x^{-1} quand $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit E un ensemble. Si X et Y sont deux parties de E, on note $X \triangle Y$ la partie de E définie par :

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$

1. (a) Faire un dessin représentant X et Y et hachurer la partie $X \triangle Y$ de E.
   (b) Montrer : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, $X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et f_A l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \ f_A(X) = X \Delta A.$$

   (a) Montrer : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $(X \Delta A) \Delta A = X$. Que cela signifie-t-il sur l'application $f_A \circ f_A$?
   (b) En déduire que f_A est bijective et expliciter la bijection réciproque f_A^{-1}.