MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Expliquer les concepts d'images directes et réciproques
Démonstration: Lien entre injection et noyau pour un morphisme de groupes.

Exercice 1

Soit f une fonction numérique telle que, pour tout x réel, sous réserve d'existence, on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \to \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes. Soient un groupe $(G, \cdot)$ et deux sous-groupes H et K du groupe G. On note :

$$HK = \{h \cdot k, h \in H, k \in K\} \text{ et } KH = \{k \cdot h, h \in H, k \in K\}$$

et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe G est commutatif.
2. (a) Soit $x \in G$. Montrer que :

$$x \in HK \iff x^{-1} \in KH.$$

   (b) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si KH est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Complétez :

- Si g et f sont injectives alors ...
- Si $g \circ f$ est injective alors ....

Démonstration: Soient f un morphisme de groupes de G dans G' et H' un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,]0,1])$ définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que f est bijective puis expliciter $f([1,2])$ et $f^{-1}\left(\left]\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]\right)$.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur $\mathbb{C}^2$ par :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$
   (a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer les classes d'équivalence associées à cette relation.

Exercice 2

Soit un anneau $(A, +, \times)$ et deux éléments a, b de A. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1 - ab$ est inversible et déterminer $(1-ab)^{-1}$.
2. Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1-ba)^{-1}$ en fonction de $(1-ab)^{-1}$.
3. On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est également inversible.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: **Complétez :** Si f et g sont bijectives alors .... et : $(g\circ f)^{-1}\cdots$.
Démonstration: Intersection de sous-groupes.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $f: x\mapsto x\sin(x)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Soient un ensemble E et une application injective $f\in\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur E par :
$$\forall(z,z')\in E^2,\ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow f(z)\leqslant f(z').$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Exercice 2

Soit un anneau $(A,+,\times)$. On dit qu'un élément $a\in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^n=0$.

1. Montrer que, si a est nilpotent, alors $1-a$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit un élément $a\in A$. On définit l'application $u:\left\{\begin{array}{lll} A & \to & A \\ x & \to & u(x)=ax-xa \end{array}\right.$.
Déterminer l'application $u^p=\underbrace{u\circ\ldots\circ u}_{\text{p fois}}$.
3. Montrer que, si a est nilpotent, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que u^p soit l'application nulle.

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Surjection : définition, illustration d'une surjection, d'une non surjection
Démonstration : Lien entre injection et noyau pour un morphisme de groupes.

Exercice 1

Soit f une fonction numérique telle que, pour tout x réel, sous réserve d'existence, on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \to \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes. Soient un groupe $(G, \cdot)$ et deux sous-groupes H et K du groupe G. On note :

$$HK = \{h \cdot k, h \in H, k \in K\} \text{ et } KH = \{k \cdot h, h \in H, k \in K\}$$

et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe G est commutatif.
2. (a) Soit $x \in G$. Montrer que :

$$x \in HK \Longleftrightarrow x^{-1} \in KH.$$

   (b) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si KH est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Complétez :

- Si g et f sont surjectives alors ...
- Si $g \circ f$ est surjective alors ....

Démonstration : Soient f un morphisme de groupes de G dans G' et H' un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,]0,1])$ définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que f est bijective puis expliciter $f([1,2])$ et $f^{-1}\left(\left]\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]\right)$.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur $\mathbb{C}^2$ par :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$
   (a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer les classes d'équivalence associées à cette relation.

Exercice 2

Soit un anneau $(A,+,\times)$ et deux éléments a,b de A. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1-ab$ est inversible et déterminer $(1-ab)^{-1}$.
2. Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1-ba)^{-1}$ en fonction de $(1-ab)^{-1}$.
3. On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1-ab$ est inversible, alors $1-ba$ est également inversible.

MP2I **Sujet 3**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir les relations binaires, les relations réflexives et les relations symétriques.
Démonstration : Intersection de sous-groupes.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $f : x \mapsto x\sin(x)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Soient un ensemble E et une application injective $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur E par :
$$\forall (z, z') \in E^2,\ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow f(z) \leqslant f(z').$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Exercice 2

Soit un anneau $(A, +, \times)$. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que, si a est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit un élément $a \in A$. On définit l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \to & u(x) = ax - xa \end{array} \right.$.
Déterminer l'application $u^p = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{\text{p fois}}$.
3. Montrer que, si a est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit l'application nulle.