MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

cf. début de l'exo 1

Exercice 1

Banque CCINP : Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $|| \, ||_E$ (respectivement $|| \, ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que f est continue.

2. Pour tout P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^k(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \text{Sup}_{\, t\in[-1,1]}(|P(t)|).$$

   (a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Montrer que la dérivation est continue pour N_1.

   (c) Montrer que la dérivation n'est pas continue pour N_2.

   (d) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

cf. début de l'exo 1

Exercice 1

Banque CCINP :

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $|| \ ||_1$ définie par : $\forall\ f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit u définie sur E par : $\forall f \in E, \forall\, x \in [0,1], (u(f))(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer que u est un endomorphisme continue de E et calculer $|||u|||$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**. Soit u définie sur $\mathbb{R}^n$ par : $u : (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $|| \ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

   Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit E un espace normé. Montrer que N_1 et N_2, deux normes sur E sont équivalentes si, et seulement si, Id_E continue de (E, N_1) vers (E, N_2) et continue de (E, N_2) vers (E, N_1).
2. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, espace muni d'une norme N. Montrer que p et q sont de même rang si : $\forall x \in E,\ N((p-q)(x)) < N(x)$.

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 15 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\cdot||_\infty$. Montrer que :

$$|||A||| = \max\left(\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|, 1\leqslant i\leqslant n\right\}\right)$$

Exercice 1

Banque CCINP : On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1.(a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans l^2.
On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\cdot||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$) puis comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 2

Soient $(E, ||\cdot||)$ un espace normé de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ ||u(x)|| \leqslant ||x||.$$

Montrer que les espaces $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.