EXERCICE 36 analyse

Énoncé exercice 36

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $||\ ||_E$ (respectivement $||\ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Corrigé exercice 36

1. P1 $\Rightarrow$ P2 de manière évidente.

   Prouvons que P2 $\Rightarrow$ P3.
   Supposons f continue en 0_E.
   Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x - 0_E\|_E \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(0_E)\|_F \leqslant 1$.
   Soit $x \in E$
   Si $x \neq 0_E$, posons $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|_E}x$. Puisque $\|y\|_E = \alpha$, on a $\|f(y)\|_F \leqslant 1$.
   Donc, par linéarité de f on obtient $\|f(x)\|_F \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\,\|x\|_E$.
   Si $x = 0_E$ l'inégalité précédente est encore vérifiée.
   En prenant alors $k = \dfrac{1}{\alpha}$, on obtient le résultat voulu.

   Prouvons que P3 $\Rightarrow$ P1.
   Supposons que $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k\,\|x\|_E$.
   Comme f est linéaire, $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y-x)\|_F \leqslant k\,\|y - x\|_E$.
   La fonction f est alors lipschitzienne, donc continue sur E.
   En effet :
   Soit $a \in E$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   On a : $\forall x \in E$, $\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant k\,\|x - a\|_E$.
   On pose $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
   Alors : $\forall x \in E$, $\|x - a\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$.
   Donc f est continue en a.

2. L'application φ est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale.
   De plus, $\forall\ f \in E$, $|\varphi(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|f\|_\infty$.
   Donc φ vérifie la propriété P3.
   Donc d'après 1., φ est continue sur E.

EXERCICE 38 analyse

Énoncé exercice 38

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.
   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.

   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

   Calculer $|||u|||$.

3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

Corrigé exercice 38

1. Soit $f \in E$. On pose $g = u(f)$.
   On a $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   Donc $||g||_1 = \displaystyle\int_0^1 |g(x)|\, dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx$.
   Or, $\forall x \in [0,1]$, $\left|\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\, dt$.
   De plus, $|f|$ est positive donc $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\, dt = ||f||_1$.
   Donc $||g||_1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 ||f||_1 dt = ||f||_1$.
   Donc $\forall f \in E$, $||u(f)||_1 \leqslant ||f||_1$.
   Donc u est continue sur E et $|||u||| = \displaystyle\sup_{f \in E\setminus\{0\}} \tfrac{||u(f)||_1}{||f||_1}$.
   Et on en déduit que $|||u||| \leqslant 1$ (*)
   On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.
   $||f_n||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \left[-\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-n}$.
   $||u(f_n)||_1 = \displaystyle\int_0^1 |u(f_n)(x)| dx$.
   Or, $u(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^x n\mathrm{e}^{-nt} dt = 1 - \mathrm{e}^{-nx}$.
   De plus, $\forall x \in [0,1]$, $1 - \mathrm{e}^{-nx} \geqslant 0$.
   Donc $||u(f_n)||_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \mathrm{e}^{-nx}\right) dx = \left[x + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}$.
   On en déduit que $\dfrac{||u(f_n)||_1}{||f_n||_1} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}}{1 - \mathrm{e}^{-n}}$.

Puis, comme $|||u||| = \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{||u(f)||_1}{||f||}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||u||| \geqslant \dfrac{||u(f_n)||_1}{||f_n||_1}$.

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|||u||| \geqslant \dfrac{1 + \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n}}{1 - \mathrm{e}^{-n}}$.

Et donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $|||u||| \geqslant 1$ $(^{**})$

Donc, d'après $(^*)$ et $(^{**})$, on en déduit que $|||u||| = 1$.

2. (a) u est clairement linéaire et $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie donc, d'après le cours, u est continue sur $\mathbb{R}^n$ et ce, quelque soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$, puisqu'elles sont toutes équivalentes.

   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$, qui est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, noté $(\ |\ )$.
   $|||u||| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|}{||x||_2}$.
   Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
   On pose $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. On a $|u(x)| = |(x|a)|$.
   Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|u(x)| \leqslant ||a||_2 ||x||_2$.
   Donc $|||u||| \leqslant ||a||_2$ $(^*)$

   On pose $x = a$.
   $a \neq 0$ donc $\dfrac{|u(x)|}{||x||_2} = \dfrac{||a||_2^2}{||a||_2}$.
   Donc $|||u||| \geqslant ||a||_2$ $(^{**})$.

   Donc, d'après $(^*)$ et $(^{**})$, $|||u||| = ||a||_2$.

3. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$.

   Pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ de E, on pose $||P|| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant p} |a_k|$.
   On considère alors l'endomorphisme u de E défini par :$\forall P \in E$, $u(P) = P'$.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{||u(P_n)||}{||P_n||} = n$ et donc $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{||u(P_n)||}{||P_n||} = +\infty$.

   Donc $\nexists k \in \mathbb{R}^+ / \ \forall P \in E, ||u(P)|| \leqslant k ||P||$.
   Donc u n'est pas continue sur E muni de la norme $||\ ||$.

EXERCICE 39 analyse

Énoncé exercice 39

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Corrigé exercice 39

1. (a) Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.

   Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.
   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
   Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
   Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
   Donc $z \in l^2$.

   On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)

   $\forall\, x = (x_n) \in l^2$, $|x_p|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$, donc $|x_p| \leqslant ||x||$.
   Donc $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, $|\varphi(x)| = |x_p| \leqslant ||x||$ (**)

   D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2.
3. On remarque déjà que $F \subset l^2$.
   Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$.
   Alors $\forall\, y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\, y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N},\, x_p = 0$.
C'est-à-dire $x = 0$.

Synthèse :
la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.

Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.
On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

Par contraposée. Supposons que f ne soit par continue., l'application linéaire f n'est donc pas continue en 0 et par suite il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \|x\| \leqslant \alpha \text{ et } \|f(x)\| > \varepsilon$$

Pour $\alpha = 1/n$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| \leqslant 1/n$ et $\|f(x_n)\| > \varepsilon$.
Considérons alors $y_n = \sqrt{n} x_n$.
On a $\|y_n\| \leqslant 1/\sqrt{n}$ donc $y_n \to 0$ et $\|f(y_n)\| > \sqrt{n}\varepsilon \to +\infty$.
Ainsi (y_n) est une suite convergeant vers 0 dont la suite image $(f(y_n))$ n'est pas bornée.

La continuité de l'application linéaire Id_E de (E, N_1) vers (E, N_2) équivaut à l'existence d'un réel $\alpha \geqslant 0$ vérifiant $N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$ pour tout $x \in E$. La propriété annoncée est alors immédiate.

Soit $x \in \ker(u - \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$.
On peut écrire $x = u(a) - a$ pour un certain $a \in E$ et on a $u(x) = x$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété $u^k(x) = x$ donne

$$u^{k+1}(a) - u^k(a) = x$$

En sommant ces relations pour k allant de 0 jusqu'à $n - 1$, on obtient

$$u^n(a) - a = nx$$

et donc

$$\|x\| = \frac{1}{n}\|u^n(a) - a\| \leqslant \frac{1}{n}(\|u^n(a)\| + \|a\|) \leqslant \frac{2}{n}\|a\| \to 0$$

Ainsi $x = 0$ et donc $\ker(u - \mathrm{Id}) \cap \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.
De plus, par la formule du rang

$$\dim \ker(u - \mathrm{Id}) + \dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$

et donc les deux espaces $\ker(u - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

Par l'absurde, supposons $\text{rg}p \neq \text{rg}q$ et, quitte à échanger, ramenons-nous au cas où $\text{rg}p < \text{rg}q$.
Par la formule du rang

$$\dim E - \dim \ker p < \text{rg}q$$

et donc

$$\dim E < \dim \ker p + \text{rg}q$$

On en déduit que les espaces $\ker p$ et $\text{Im}q$ ne sont pas supplémentaires et donc il existe un vecteur $x \neq 0_E$ vérifiant

$$x \in \ker p \cap \text{Im}q$$

On a alors

$$(p - q)(x) = p(x) - q(x) = -x$$

donc

$$N((p - q)(x)) = N(x)$$

Or

$$N((p - q)(x)) < N(x)$$

C'est absurde.

$T_\varphi : E \to \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_2 \, \|f\|_2$$

donc T_φ est continue.

Pour tout $f \in E$,

$$|\varphi(f)| = \int_0^1 |tf(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1$$

donc φ est continue.

a) L'application $N_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car la somme se limite à un nombre fini de termes non nuls.
Si $N_1(P) = 0$ alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

donc $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| + \left| Q^{(k)}(0) \right|$$

donc

$$N_1(P+Q) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| + \sum_{k=0}^{+\infty} \left| Q^{(k)}(0) \right| = N_1(P) + N_1(Q)$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \lambda P^{(k)}(0) \right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| = |\lambda| \, N_1(P)$$

Finalement N_1 est une norme.
L'application $N_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car une fonction continue sur un segment y est bornée.
Si $N_2(P) = 0$ alors

$$\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$$

Par infinité de racines $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_2(P+Q) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leqslant \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + |Q(t)|$$

donc

$$N_2(P+Q) \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q)$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda|\,|P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| = |\lambda|\, N_2(P)$$

Finalement N_2 est aussi norme.
b) Notons $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'opération de dérivation.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| D(P)^{(k)}(0) \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k+1)}(0) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{k}(0) \right| = N_1$$

donc l'endomorphisme D est continu pour la norme N_1.
c) Soit $P_n = X^n$. On a $D(P_n) = nX^{n-1}$ donc $N_2(P_n) = 1$ et
$N_2(D(P_n)) = n \to +\infty$.
Par suite l'endomorphisme D n'est pas continu pour N_2.
d) Par ce qui précède, les normes ne sont pas équivalentes. Néanmoins
$P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ donc

$$|P(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} \leqslant N_1(P)$$

donc

$$N_2(P) \leqslant N_1(P)$$

C'est là la seule (et la meilleure) comparaison possible.