BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Citer les propriétés classiques du produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1

On pose : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que : } \; x + y + z + t = 0 \; \text{ et } \; x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $x = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 2

On appelle E l'espace $\mathbb{R}^n$, n entier naturel non nul. Un endomorphisme f de E est dit symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \; \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

1.(a) Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E et si f est un endomorphisme de E, démontrer que :

$$f \text{ est symétrique } \iff \forall (i, j) \in ([\![1, n]\!])^2, \; \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, f(e_j)\rangle.$$

(b) Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E, et si f est un endomorphisme de E, démontrer que f est symétrique si et seulement si sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

2. Soit A une partie de E. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit f un endomorphisme symétrique de E, montrer que :
   (a) $(\mathrm{Im} f)^\perp = \mathrm{Ker} f$
   (b) $\mathrm{Im} f \subset (\mathrm{Ker} f)^\perp$
4. Soient f un endomorphisme symétrique de E, montrer que u et v sont orthogonaux avec $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f - \mu Id_E)$ avec λ et μ deux réels disctincts.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Propriétés classiques du projecteur orthogonal, expression dans une base orthonormée

Exercice 1

1. Expliciter une base orthonormée du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - 2z = 0$.
2. Déterminer la matrice A canoniquement associée à la projection orthogonale p dans $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ f = f$ et $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\|f(u)\| \leqslant \|u\|$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On note p la projection orthogonale sur F. Montrer que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, $\|p(u)\| \leqslant \|u\|$.
2. Montrer que, pour tout vecteur v appartenant à l'image de f, on a : $f(v) = v$.
3. Montrer que le projeté orthogonal sur $\mathrm{Ker}(f)$ de tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ est égal au vecteur nul.
4. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u - f(u) \in \mathrm{Ker}(f)$.
5. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Citer le théorème spectral et lien entre distance et projecteur orthogonal

Exercice 1

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n avec n entier naturel.

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y)^2 + (x+2z-1)^2 + (y-z+2)^2$$

1. Vérifier que l'on peut écrire $f(x,y,z) = \|u-v\|^2$ avec $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$, u_1, u_2, u_3 étant des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera et $v = (0,1,-2)$.
2. Déterminer une base orthonormée de l'espace vectoriel F engendré par (u_1, u_2, u_3).
3. Expliciter la projection orthogonale sur F.
4. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.