

Mini question de cours

Citer les identités remarquables (avec le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^n avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 1

On pose : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que : } x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .
3. Déterminer la distance du vecteur $x = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace vectoriel F .

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice canoniquement associée est la matrice A suivante :

$$A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres pour f .
2. Calculer $A^T \times A$ et en déduire que $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ pour tout élément \vec{v} de \mathbb{R}^3 .
3. Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de f ?
4. Déterminer $E_{-1}(f)$.
5. En déduire le spectre de f ainsi que la dimension des sous-espaces propres de f .
6. Donner la nature géométrique de f .

Mini question de cours

Propriétés classiques du projecteur orthogonal : expression dans une base orthonormée

Exercice 1

1. Expliciter une base orthonormée du plan \mathcal{P} d'équation $x + y - 2z = 0$.
2. Déterminer la matrice A canoniquement associée à la projection orthogonale p dans \mathbb{R}^3 sur le plan \mathcal{P} .

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n vérifiant $f \circ f = f$ et $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\|f(u)\| \leq \|u\|$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On note p la projection orthogonale sur F . Montrer que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, $\|p(u)\| \leq \|u\|$.
2. Montrer que, pour tout vecteur v appartenant à l'image de f , on a : $f(v) = v$.
3. Montrer que le projeté orthogonal sur $\text{Ker}(f)$ de tout vecteur de $\text{Im}(f)$ est égal au vecteur nul.
4. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u - f(u) \in \text{Ker}(f)$.
5. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\text{Im}(f)$.

COLLES DE MATHÉMATIQUES**Mini question de cours**

Citer le théorème spectral et lien entre distance et projecteur orthogonal

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Donner une base orthonormale de F^\perp avec $F = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n avec n entier naturel.

Exercice 2

Soit f définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y)^2 + (x + 2z - 1)^2 + (y - z + 2)^2$$

1. Vérifier que l'on peut écrire $f(x, y, z) = \|u - v\|^2$ avec $u = xu_1 + yu_2 + zu_3$, u_1, u_2, u_3 étant des vecteurs de \mathbb{R}^3 que l'on précisera et $v = (0, 1, -2)$.
2. Déterminer une base orthonormée de l'espace vectoriel F engendré par (u_1, u_2, u_3) .
3. Expliciter la projection orthogonale sur F .
4. En déduire le minimum de f sur \mathbb{R}^3 .