MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

On munit l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\exp(-t)dt$$

Proposer deux méthodes de calcul de la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ et en rédiger une.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Montrer que : $h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\, (f, g) \in E^2,\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose :
   $$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$
   (a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
   (b) Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la famille $(\cos, \sin, \exp)$.
2. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il est impossible que pour tout (i, j) de $(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)^2$ tel que $i \neq j$, on ait $\langle x_i, x_j \rangle < 0$.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et étude du cas d'égalité.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$ Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par, pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose :
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
Pour tout f dans E, on note F la primitive de f qui s'annule en 0 et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.
   (a) Déterminer un endomorphisme v^* vérifiant
   $$\forall (f, g) \in E^2,\ \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle$$
   (b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.
2. Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et φ: $E \times E \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par : Pour tout (x, y) de E^2, on pose :
$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle$$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur E.
   (b) Imaginons que E soit $\mathbb{R}^3$ et que $\langle \cdots, \cdots \rangle$ soit le produit scalaire euclidien, orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire φ .

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 16 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Détermine la distance (avec le produit scalaire habituel) de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 1

Banque CCINP : On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi \colon E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par : Pour tout polynômes P et Q, on a : $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\exp(-t)dt$.

1. Justifier que l'application φ est bien définie.
2. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
3. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
4. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.