Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Image d'un segment et TVI
Démonstration: Énoncé et démonstration de la caractérisation séquentielle de la limite (démonstration dans le cas d'une limite en un réel et avec une limite finie).

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$ et $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ sont-elles prolongeables par continuité en -2 ?
2. Même question avec $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3-12x+17}-\sqrt{x^3-3x^2+5}}{x^2-4x+4}$ en 2.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right)$.

Exercice 2

On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en zéro telle que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)$$

et $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en zéro et telle que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)\cos(x).$$

1. Montrer que, si $f\in\mathcal{C}$, alors f est une fonction constante.
2. Soit $\varphi:\mathbb{R}^\star\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall\, x\in\mathbb{R}^\star,\ \varphi(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrer que ψ, le prolongement par continuité en zéro de φ, appartient à $\mathcal{D}$.
3. Soient $f\in\mathcal{D}$, $g_1:\begin{cases}]-\pi,\pi[& \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{\psi(x)}\end{cases}$ et $g_2:\begin{cases}\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}^\star & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{\psi(x)}\end{cases}$.
   (a) Montrer que g_1 est une fonction constante.
   (b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $\forall\, x\in[-\pi,\pi]\,,\ f(x)=\lambda\psi(x)$.
   (c) À l'aide de la fonction g_2, expliciter $\mathcal{D}$.

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 15 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Citer le théorème de Rolle (et avec un dessin!) et inégalité des accroissements finis.
Démonstration: Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que, si f est injective et si $f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante. On utilisera la fonction φ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi : \lambda \mapsto f((1-\lambda)b + \lambda y) - f((1-\lambda)a + \lambda x)$ avec $(x,y) \in [a,b]^2$ tel que $x < y$.

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{-x^2+1}{3x+2} \right)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+x} \right)$ puis montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\cos(\ln(x)))$ n'existe pas.

Exercice 2

Pour tout m entier naturel, on appelle f_m la fonction suivante : $f_m : x \mapsto x^m + x^2 + 2x - 1$.
Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer les inégalités suivantes : $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 15 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Fonctions lipschitziennes : définition, propriétés classiques ?
Démonstration: Théorème des bornes atteintes.

Exercice 1

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+x}\right)$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(1 - x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \left(\frac{-x^2+x+6}{x^2+9-6x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x\sin(x))$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a : $f(nx) = nf(x)$
   (b) Expliciter $f(0)$.
   (c) Étudier la parité de f.
2. En déduire l'existence d'un réel α tel que :
   (a) pour tout entier naturel n, on a : $f(n) = n\alpha$.
   (b) pour tout entier n, on a : $f(n) = n\alpha$.
   (c) pour tout rationnel x, on a : $f(x) = x\alpha$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Expliciter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tels que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (u_n) = x$.
   (b) Déterminer f.

MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 15 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Dérivée d'une somme, produit, quotient et réciproque
Démonstration : Énoncé et démonstration de la caractérisation séquentielle de la limite (démonstration dans le cas d'une limite en un réel et avec une limite finie).

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$ et $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ sont-elles prolongeables par continuité en -2 ?
2. Même question avec $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^3-12x+17}-\sqrt{x^3-3x^2+5}}{x^2-4x+4}$ en 2.
3. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}\right)$.

Exercice 2

On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en zéro telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$$

et $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en zéro et telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos(x).$$

1. Montrer que, si $f \in \mathcal{C}$, alors f est une fonction constante.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^\star,\ \varphi(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrer que ψ, le prolongement par continuité en zéro de φ, appartient à $\mathcal{D}$.
3. Soient $f \in \mathcal{D}$, $g_1 : \begin{cases}]-\pi,\pi[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{\psi(x)} \end{cases}$ et $g_2 : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{\psi(x)} \end{cases}$.
   (a) Montrer que g_1 est une fonction constante.
   (b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $\forall\, x \in [-\pi,\pi]\,,\ f(x) = \lambda\psi(x)$.
   (c) À l'aide de la fonction g_2, expliciter $\mathcal{D}$.

MP2I **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 15 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Citer le théorème des accroissements finis (et avec un dessin!) et inégalité des accroissements finis.
Démonstration : Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que, si f est injective et si $f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante. On utilisera la fonction φ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi : \lambda \mapsto f((1-\lambda)b + \lambda y) - f((1-\lambda)a + \lambda x)$ avec $(x,y) \in [a,b]^2$ tel que $x < y$.

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{-x^2+1}{3x+2}\right)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+x}\right)$ puis montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (\cos(\ln(x)))$ n'existe pas.

Exercice 2

Pour tout m entier naturel, on appelle f_m la fonction suivante : $f_m : x \mapsto x^m + x^2 + 2x - 1$.
Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer les inégalités suivantes : $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 15 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Formule de Leibniz
Démonstration : Théorème des bornes atteintes.

Exercice 1

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$
2. $\lim_{x \longrightarrow 0} \left(1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right)$
3. $\lim_{x \longrightarrow 3} \left(\frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 9 - 6x} \right)$
4. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x \sin(x))$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :$f(nx) = nf(x)$
   (b) Expliciter $f(0)$.
   (c) Étudier la parité de f.
2. En déduire l'existence d'un réel α tel que :
   (a) pour tout entier naturel n, on a : $f(n) = n\alpha$.
   (b) pour tout entier n, on a : $f(n) = n\alpha$.
   (c) pour tout rationnel x, on a : $f(x) = x\alpha$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Expliciter une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tels que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_n) = x$.
   (b) Déterminer f.