EXERCICE 79 algèbre

Énoncé exercice 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose : $\forall\,(f,g)\in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé exercice 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

   On pose $\forall\, x\in[a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
   h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
   De plus, $\forall\, x\in[a,b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.
   Donc $\forall\, x\in[a,b]$, $F'(x) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x\in[a,b]$, $h(x) = 0$.
2. On pose $\forall\,(f,g)\in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f\in E$. $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.
   Or $x\longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a<b$ donc $(f|f)\geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f\in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Or $x\longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

EXERCICE 80 algèbre

Énoncé exercice 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé exercice 80

1. On pose $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0,2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0,2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0,2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^\perp$ (car $F = \mathrm{Vect}(f,g)$).

   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

EXERCICE 81 algèbre

Énoncé exercice 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Corrigé exercice 81

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \operatorname{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)||$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car $t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) L'application φ est clairement bilinéaire symétrique et positive.
Si $\varphi(P,P) = 0$ alors par intégration d'une fonction continue positive on obtient
$$\forall t \in [0\,;+\infty[, P(t)^2\,\mathrm{e}^{-t} = 0$$
et donc P admet une infinité de racines (les éléments de $[0\,;+\infty[$), c'est donc le polynôme nul.

c) Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\varphi(X^p, X^q) = I_{p+q}$.
Par intégration par parties impropre justifiée par la convergence du crochet
$$\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^n\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
Ainsi, $I_n = nI_{n-1}$. Sachant $I_0 = 1$, on conclut $I_n = n!$ et
$$\varphi(X^p, X^q) = (p+q)!$$

d) Notons que la famille $(1, X, X^2)$ est libre et qu'il est donc licite de l'orthonormaliser par le procédé de Schmidt. On pose $P_0 = 1$.
On cherche $P_1 = X + \lambda P_0$ avec $(P_0 \mid P_1) = 0$ ce qui donne $1 + \lambda = 0$ et donc $P_1 = X - 1$.
On cherche $P_2 = X^2 + \lambda P_0 + \mu P_1$ avec $(P_0 \mid P_2) = 0$ et $(P_1 \mid P_2) = 0$ ce qui donne $2 + \lambda = 0$ et $4 + \mu = 0$ donc $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
La famille orthonormalisée cherchée et alors (Q_0, Q_1, Q_2) avec
$$Q_0 = 1, Q_1 = X - 1 \text{ et } Q_2 = \frac{1}{2}\left(X^2 - 4X + 2\right)$$

Exercice 2 : [énoncé]
Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a
$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 + k\,\langle x, a\rangle^2$$
En particulier
$$\varphi(a,a) = \|a\|^2 + k\,\|a\|^4 = (1+k)$$
Pour que la forme bilinéaire symétrique φ soit définie positive, il est nécessaire que $1 + k > 0$.
Inversement, supposons $1 + k > 0$.
Si $k \geq 0$ alors $\varphi(x,x) \geq \|x\|^2$ et donc
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(x,x) > 0$$
Si $k \in\,]-1\,;0[$, $k = -\alpha$ avec $\alpha \in\,]0\,;1[$ et
$$\varphi(x,x) = \|x\|^2 - \alpha\,\langle x, a\rangle^2$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\langle x, a\rangle^2 \leq \|x\|^2\,\|a\|^2 = \|x\|^2$$
donc
$$\varphi(x,x) \geq \|x\|^2 - \alpha\,\|x\|^2 = (1-\alpha)\,\|x\|^2$$
de sorte que
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(x,x) > 0$$
Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.
Finalement, φ est un produit scalaire si, et seulement si, $1 + k > 0$.

Exercice 3 : [énoncé]
L'application φ est bien définie de $E \times E \to \mathbb{R}$ et clairement bilinéaire et symétrique.
Soit $f \in E$.
$$\varphi(f,f) = \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t + 2f(0)f(1)$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq (f(1) - f(0))^2$$
puis
$$\varphi(f,f) \geq f(1)^2 + f(0)^2 \geq 0$$
Au surplus, si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = f(1) = 0$, mais aussi $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction f est donc constante égale à 0.

(a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_0^1 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\left(G(1) - G(x)\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^*(g)\colon x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x) \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha\cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.
Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$.
Pour $n = 2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.
Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, \left(x_i \mid x_j\right) < 0$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D = \text{Vect}\, x_{n+1}$, on peut écrire pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i = y_i + \lambda_i x_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i < 0$ puisque $(x_i \mid x_{n+1}) < 0$.
On remarque alors

$$\left(x_i \mid x_j\right) = \left(y_i \mid y_j\right) + \lambda_i \lambda_j \|x_{n+1}\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \left(y_i \mid y_j\right) < 0$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2, \dots, y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi dire que la famille $(y_2, \dots, y_n, x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs.
Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$.
Récurrence établie.

Exercice 2 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Pour $n = 1$: Soit u un vecteur unitaire de E. On peut écrire $x_1 = \lambda_1.u, x_2 = \lambda_2.u, x_3 = \lambda_3.u$
On a alors

$$(x_1 \mid x_2) = \lambda_1\lambda_2, (x_2 \mid x_3) = \lambda_2\lambda_3, (x_3 \mid x_1) = \lambda_3\lambda_1$$

Ces trois quantités ne peuvent être négatives car

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_3\lambda_3\lambda_1 = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 \geq 0$$

Supposons la propriété établie au rang $(n-1) \in \mathbb{N}^*$:
Par l'absurde, supposons que la configuration soit possible :
Nécessairement $x_{n+2} \neq 0$.
Posons $F = \text{Vect}(x_{n+2})^\perp$. On a $\dim F = n - 1$.

$$\forall 1 \leq i \leq n+1, x_i = y_i + \lambda_i . x_{n+2}$$

avec $y_i \in F$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Comme $(x_i \mid x_{n+2}) < 0$ on a $\lambda_i < 0$.

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, \left(x_i \mid x_j\right) = \left(y_i \mid y_j\right) + \lambda_i\lambda_j \|x_{n+2}\|^2 < 0$$

donc $\left(y_i \mid y_j\right) < 0$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(y_1, \dots, y_{n+1})$ formée de vecteurs qui évoluent dans F. Récurrence établie.

Exercice 3 : [énoncé]
Cas $n = 1$.
Supposons disposer de vecteurs x_1, x_2, x_3 tels que

$$\forall i \neq j, \left(x_i \mid x_j\right) < 0$$

Puisque $x_1 \neq 0$, (x_1) est une base de E.
Cela permet d'écrire $x_2 = \lambda x_1$ et $x_3 = \mu x_1$.
$(x_2 \mid x_1) < 0$ et $(x_3 \mid x_1) < 0$ donne $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ mais alors $(x_2 \mid x_3) = \lambda\mu \|x_1\|^2 > 0$!
Cas $n = 2$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_4$ tels que

$$\forall i \neq j, \left(x_i \mid x_j\right) < 0$$

x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^\perp$ et $\lambda_i < 0$.
On

$$\forall i \neq j \geq 2, \left(x_i \mid x_j\right) = \lambda_i\lambda_j + \left(y_i \mid y_j\right) < 0$$

donc $\left(y_i \mid y_j\right) < 0$.
y_2, y_3, y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^\perp$, l'étude du cas $n = 1$ permet de conclure.
Cas général.
Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$: ci-dessus
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.