BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 18 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Définition de la covariance.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement et avec remise. On note X le premier numéro tiré et Y le second. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer $E(U)$.
3. En déduire $E(V)$.

Exercice 2

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geqslant 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $(X = n)$, puis la loi de X_i.
2. Déterminer, sans nouveau calcul, la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Déterminer la covariance de X_1 et X.
5. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 18 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Variance d'une somme.

Exercice 1

1. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(l+m)$.
2. Montrer alors que la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 2

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B. On constate que le serveur A est choisi dans 70 % des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres. On note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

1. Écrire en langage `Python` une fonction permettant de simuler une réalisation de l'expérience et renvoyant les valeurs de L_1 et L_2 correspondantes.
2. Déterminer la loi de L_1 et vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1=k)=1$.
3. Déterminer l'espérance mathématique de L_1.
4. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi de L_2.
5. Calculer $P(L_1=L_2)$.

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Petit cours sur somme et loi Bernoulli, loi binomiale, loi de Poisson.

Exercice 1

Une usine produit des boîtes de conserve. Chaque boîte a une probabilité p d'être défectueuse et p' d'être contrôlée. Ces événements sont supposés indépendants.

1. Donner la loi de N, N étant le nombre de boîtes produites avant qu'une première boîte défectueuse ne soit contrôlée.
2. Soit K le nombre de boîtes défectueuses parmi les N précédentes. Donner la loi conjointe de K et N puis la loi de K.

Exercice 2

Une urne contient N jetons numérotés $1, 2, ..., k$ avec $2 \leqslant k \leqslant N$. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on note n_i le nombre de jetons portant le numéro i et $p_i = \dfrac{n_i}{N}$. On suppose que n_i est non nul pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.
On fixe enfin $n \in \mathbb{N}^*$ et on effectue dans cette urne n tirages successifs d'un jeton avec remise.

1. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant le numéro i. Déterminer la loi de N_i, son espérance et sa variance.
2. Soit $(i, j) \in ([\![1, k]\!])^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de $N_i + N_j$, son espérance et sa variance.
   (b) En déduire la valeur de la covariance du couple (N_i, N_j).
3. Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On note X_i la variable de Bernoulli valant 1 lorsque le numéro i n'est pas apparu au cours des n tirages.
   (a) Exprimer l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de la variable aléatoire N_i.
   (b) En déduire la loi de X_i.
4. On pose Z_n la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros qui ne sont pas sortis au cours des n tirages.
   (a) Calculer, sans passer par sa loi, l'espérance de Z_n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(E(Z_n))$.
   (b) Montrer que $P(Z_n \geqslant 1) \leqslant E(Z_n)$.
   (c) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0))$.