EXERCICE 63 algèbre

Énoncé exercice 63

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
ii. $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

Corrigé exercice 63

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
On considère u la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a bien $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ mais u n'est pas l'endomorphisme nul.

2. Prouvons que i. $\Longleftrightarrow$ ii.
Procédons par double implication.

Supposons que $u \circ u^* = u^* \circ u$.
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Soit $(x,y) \in E^2$.
Par définition de l'adjoint, $(u(x)|u(y)) = (x|u^* \circ u(y))$.
Or, par hypothèse, $u \circ u^* = u^* \circ u$.
Donc $(u(x), u(y)) = (x|u \circ u^*(y))$.
Or, par définition de l'adjoint, $(x|u \circ u^*(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Donc $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.

Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Prouvons que $u \circ u^* = u^* \circ u$.
Soit $x \in E$.
Prouvons que $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.
Soit $y \in E$.
Par bilinéarité du produit scalaire, $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x)|y) = (u \circ u^*(x)|y) - (u^* \circ u(x)|y)$.
Or, par définition de l'adjoint, $(u \circ u^*(x)|y) = (u^*(x)|u^*(y))$ et $(u^* \circ u(x)|y) = (u(x)|u(y))$.
Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x)|y) = (u^*(x)|u^*(y)) - (u(x)|u(y))$.
Or, par hypothèse, $(u^*(x)|u^*(y)) = (u(x)|u(y))$.
Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x)|y) = (u(x)|u(y)) - (u(x)|u(y)) = 0$.
Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.
Or $E^\perp = \{0\}$.
Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) = 0$.

Prouvons que ii. $\Longleftrightarrow$ iii.
Procédons par double implication.

On suppose que $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Donc, en prenant $y = x$, on obtient : $\forall x \in E$, $||u(x)||^2 = ||u^*(x)||^2$.
Or, $\forall x \in E$, $||u(x)| \geqslant 0$ et $||u^*(x)|| \geqslant 0$.
Donc $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

On suppose que $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
Soit $(x,y) \in E^2$.

D'après une identité de polarisation, $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(||u(x)+u(y)||^2 - ||u(x)||^2 - ||u(y)||^2\right)$.
Or, u est linéaire donc $||u(x)+u(y)||^2 = ||u(x+y)||^2$.
De plus par hypothèse, $||u(x+y)|| = ||u^*(x+y)||$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$ et $||u(y)|| = ||u^*(y)||$.
Donc $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(||u^*(x+y)||^2 - ||u^*(x)||^2 - ||u^*(y)||^2\right)$.
Or u^* est linéaire donc $||u^*(x+y)|| = ||u^*(x)+u^*(y)||$.
Donc $(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(||u^*(x)+u^*(y))||^2 - ||u^*(x)||^2 - ||u^*(y)||^2\right)$.
Or, d'après une identité de polarisation, $(u^*(x)|u^*(y)) = \frac{1}{2}\left(||u^*(x)+u^*(y))||^2 - ||u^*(x)||^2 - ||u^*(y)||^2\right)$.
Donc $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.

EXERCICE 66 algèbre

Énoncé exercice 66

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Corrigé exercice 66

On introduit, sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $||\ ||$, associée au produit scalaire canonique, définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $||X|| = \sqrt{X^T X}$.

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
   Raisonnons par double implication.

   Supposons que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouvons que $\mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
   Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$.
   $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ /\ AX = \lambda X$.
   Alors $X^T AX = X^T \lambda X = \lambda ||X||^2$.
   Or, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc $X^T AX \geqslant 0$.
   Donc $\lambda ||X||^2 \geqslant 0$.
   Or, $X \neq 0$ donc $||X||^2 > 0$.
   Donc $\lambda \geqslant 0$.

   Supposons que $\mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
   Prouvons que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, $\exists P \in \mathrm{O}(n)\ /\ A = PDP^T$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.
   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $X^T AX = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D(P^T X)$.
   Notons $y_1, y_2, ..., y_n$ les composantes de la matrice colonne $Y = P^T X$.
   Ainsi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ et donc $X^T AX = Y^T DY = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. (1)
   Or, λ_1, λ_2,...,λ_n sont les valeurs propres de A donc, par hypothèse, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
   Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i y_i^2 \geqslant 0$.
   Donc, d'après (1), $X^T AX \geqslant 0$.
2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouvons que $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.

   $\left(A^2\right)^T = A^T A^T$.
   Or, $A \in S_n(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$. Donc $\left(A^2\right)^T = A^2$. Donc $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$.

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   $X^T A^2 X = X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = ||AX||^2 \geqslant 0$.
   Donc $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   On suppose que $AB = BA$.
   Prouvons que $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Remarque : par hypothèse, A et B commutent donc A^2 et B commutent.
   En effet : $A^2B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2$.

$(A^2B)^T = B^T\left(A^2\right)^T = B^T\left(A^T\right)^2$.
Or, $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$ et $B^T = B$.
Donc $(A^2B)^T = BA^2$.
Or, d'après la remarque, A^2 et B commutent.
Donc $\left(A^2B\right)^T = A^2B$.
Donc $A^2B \in S_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
A et B commutent donc $X^T\left(A^2B\right)X = X^TABAX$.
Or, A est symétrique donc $X^TABAX = (AX)^T B(AX)$.
On pose $Y = AX$.
$Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ donc $(AX)^T B(AX) = Y^TBY \geqslant 0$.
Donc $X^TA^2BX \geqslant 0$.
Donc $A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
$A \in S_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral et 1. :
$\exists P \in \mathrm{O}(n)\ /\ A = PDP^T$ où $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.
On pose $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right)$.
Alors $A = P\Delta^2P^T = P\Delta P^TP\Delta P^T$ car $P^T = P^{-1}$.
C'est-à-dire, $A = \left(P\Delta P^T\right)^2$.
On pose alors $B = P\Delta P^T$.
On a $A = B^2$.
De plus, $B^T = \left(P^T\right)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = B$ donc $B \in S_n(\mathbb{R})$.
De plus, B est semblable à Δ donc $\mathrm{sp}(B) = \left\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right\}$ et donc $\mathrm{sp}(B) \subset [0, +\infty[$.
Donc $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

EXERCICE 78 algèbre

Énoncé exercice 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.
   C'est -à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||\}$.

   Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Corrigé exercice 78

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Soit $(x,y) \in E^2$.
   On a, d'une part, $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$. (*)
   D'autre part,
   $\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|y\|^2$. (**)
   On en déduit, d'après (*) et (**), que $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
   (b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
   Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$.
   Donc $x = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
   Donc u est injectif.
   Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.
2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
   On a $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
   On a aussi, évidemment, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.
   Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
   $\forall\, x \in E$, $\left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|u(v^{-1}(x))\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Et $\left\|v^{-1}(x)\right\| = \left\|v(v^{-1}(x))\right\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
   Donc $\forall\, x \in E, \left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \|x\|$.
   On en déduit que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

   Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Soit $(i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$.
   $u \in \mathcal{O}(E)$ donc, d'après 1.(a), $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j)$.
   Or e est une base orthonormée de E donc $(e_i|e_j) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.
   On en déduit que $\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$,$(u(e_i)|u(e_j)) = \delta_i^j$.
   C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une famille orthonormée de E.
   Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.
   Donc $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

   Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   Soit $x \in E$.

   Comme e est une base orthonormée de E, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$||x||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\,(e_i|e_j).$$

Or e est une base orthonormée de E donc $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (*)

De même, par linéarité de u, $||u(x)||^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) | \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\,(u(e_i)|u(e_j))$.

Or $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E, donc $||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (**)

D'après (*) et (**), $\forall\, x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$.
Donc $u \in \mathcal{O}(E)$.

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

   (b) On obtient $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \mathrm{Vect}(1,-1,1)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.

   (c) $\mathrm{rg} A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
   Puisque $\mathrm{tr} A = 3$ et que $\mathrm{tr} A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
   Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.

   (d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.

2. On note $e = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $(\mid)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.
$E_3(f) = \mathrm{Vect}(1,-1,1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
Donc $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
$\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
On les normalise et on pose $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.
Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.

On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

---

1. (a) Les vecteurs colonnes de la matrice A sont deux à deux orthogonaux et de norme 1, donc $A \in O(3)$.
   Or (i, j, k) est une base orthonormée de E, donc $f \in O(E)$.

   (b) Pour déterminer les vecteurs invariants, on résout le système $AX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = X \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases}$$

   Donc $AX = X \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{6}L_1}{\iff} \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

   Donc l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite $\Delta = \mathrm{Vect}(i + j)$.

2. Comme $\dim \Delta = 1$, d'après les résultats sur la réduction d'une isométrie vectorielle en dimension 3, f est nécessairement une rotation.
On oriente l'axe Δ de cette rotation par le vecteur $i + j$.

Déterminons l'angle θ de la rotation f.
Comme la trace est invariante par changement de base, $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr} A$.
On en déduit que $\cos\theta = \frac{1}{2}$. (1)

Il reste donc à déterminer le signe de $\sin\theta$.
On pose $w = \dfrac{i + j}{||i + j||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.
On a donc $\Delta = \mathrm{Vect} w$ avec w unitaire.
Si u est un vecteur unitaire orthogonal à Δ, alors $\sin\theta = \mathrm{Det}(u, f(u), w)$. Prenons par exemple $u = k$.

On a $f(u) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
On calcule alors le déterminant :

$$\mathrm{Det}(u, f(u), w) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c'est-à-dire $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta = \dfrac{\pi}{3} \bmod (2\pi)$.

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
Montrons que chaque colonne de A ne comporte qu'au plus un coefficient non nul.
Par l'absurde, supposons que la j-ème colonne de A possède au moins deux coefficients non nuls situés en k-ième et en ℓ-ième ligne. Puisque les colonnes de A sont orthogonales, on a pour tout $j' \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} a_{i,j'} = 0$$

Sachant que tous les coefficients sont positifs, cette équation équivaut à

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,j} a_{i,j'} = 0$$

et on en tire

$$a_{k,j'} = a_{\ell,j'} = 0$$

Ainsi les $n - 1$ colonnes correspondant aux indices autres que j appartiennent à l'espace formé des colonnes dont les k-ième et ℓ-ième coefficients sont nuls. Or ces $n - 1$ colonnes sont indépendantes et cet espace est de dimension $n - 2$. C'est absurde.

Puisque les colonnes de A sont de norme 1 et que ses coefficients sont positifs, sur chaque colonne figure un 1 et $n - 1$ coefficients nuls.
Le même raisonnement peut être adapté aux lignes de A pour affirmer que chacune d'elles contient un coefficient 1 et $n - 1$ coefficients nuls.
Inversement, on vérifie aisément qu'une telle matrice est une matrice orthogonale à coefficients positifs.
En fait, les matrices considérés sont les matrices de permutation, il y en a $n!$

($\Rightarrow$) Si V est stable pour f alors $f(V) \subset V$ et puisque f est un automorphisme $f(V) = V$. Soient $x \in V^\perp$ et $y \in V$

$$(f(x) \mid y) = (x \mid f^{-1}(y)) = 0$$

car $f^{-1}(y) \in V$ donc $f(x) \in V^\perp$ puis $V^\perp$ stable par f.
($\Leftarrow$) Si $V^\perp$ stable par f alors $V = V^{\perp\perp}$ aussi

---

Soit λ valeur propre de f. Pour x vecteur propre, on a $f(x) = \lambda x$ avec $\|f(x)\| = \|x\|$ d'où $\lambda = \pm 1$. Une diagonalisation de f est alors réalisée avec des 1 et des -1 sur la diagonale, c'est une symétrie.

On a

$$A^7 = A^4 \times (A^t A) = A^{5t} A$$

puis

$$A^7 = A^3 \left({}^t A\right)^2 = A \left({}^t A\right)^3 = A^t \left(A^t A\right) = A^{2t} A = A^4$$

Ainsi $X^7 - X^4 = X^4(X^3 - 1)$ annule A.
Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\ker A^4 = \ker A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3 - 1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, cela sera décisif pour conclure.
Evidemment $\ker A \subset \ker A^4$. Inversement, soit $X \in \ker A^4$. On a

$$A^t A A X = A^4 X = 0$$

donc

$$\left\|{}^t A A X\right\|^2 = {}^t X^t A A^t A A X = 0$$

et par conséquent ${}^t A A X = 0$. Alors

$$\|AX\|^2 = {}^t X^t A A X = 0$$

et donc $AX = 0$. Ainsi $\ker A^4 \subset \ker A$ puis l'égalité.

(a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x) g(x) \,\mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_0^1 f(x) G(x) \,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x) g(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \left(G(1) - G(x)\right) \mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^*(g) : x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t) \,\mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x) \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha \cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.
Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.