MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit $u \in S(E)$, on a : $u \in S^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
   (a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières différentes.
   (b) Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2. Soit B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$B^3 = BB^T$$
   Montrer que B est diagonalisable.

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}\,(u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\,(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. On pose $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée. Prouver que f est un endomorphisme orthogonal et déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.
2. Soit f un élément de $\mathcal{O}(E)$, E espace euclidien, et V un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Monter que V est stable par f si et seulement si $V^\perp$ l'est.
   (b) On suppose uniquement dans cette question que f diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.
   (c) Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 17 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Il existe S dans $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A$.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.
   C'est -à-dire $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||\}$.
   Démontrer que $\mathcal{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2

On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par, pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Pour tout f dans E, on note F la primitive de f qui s'annule en 0 et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.

1. Déterminer l'adjoint v^* de v.
2. Que peut-on dire du signe des valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$?
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.