

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir avec des quantificateurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 8563$ avec f une fonction numérique définie sur \mathbb{R}^+ .

Démonstration: Dérivée d'une réciproque.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^x - e}{\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$ puis évaluer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$

3. $f : x \mapsto x \ln(1+x),$

Exercice 2

On définit f la fonction suivante : $f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x - \ln(x)}{2} \end{cases}$ On note (E) l'équation suivante d'inconnue x réel strictement positif : $\ln(x) + x = 0$. (E)

1. Montrer que (E) admet une unique solution. Nous noterons α cette solution.

2. Dresser le tableau de variations de f .

3. Montrer alors que, pour tous réels x et y de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right) |x - y|$$

4. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Citer le théorème de minoration, majoration et de passage à la limite dans les inégalités.

Démonstration: Théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On prolonge f en posant $f(0) = 0$.

1. Prolonger f par continuité. On appelle encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0 et préciser sa position par rapport au graphe.
4. Factoriser f' afin d'en déduire le tableau de variations de f .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur I , intervalle de réels, et dérivables en a (avec $a \in I$). Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \right)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction suivante définie sur \mathbb{R}_+^* définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

- (a) Montrer que $f_n^{(n)}$ existe sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n.$$

- (b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \binom{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right)$.

Définition et QC**Définition/ Explication:** Théorème de la limite monotone pour les fonctions**Démonstration:** Théorème des accroissements finis.**Exercice 1**

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \text{ et } g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} sans y être de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 2**Les deux questions sont indépendantes.**

- 1.(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \right)$.

2. Pour tout
- $(c, d) \in \mathbb{R}^2$
- ,
- (c, d)
- désignera le segment d'extrémités
- c
- et
- d
- . Soient
- f
- une fonction numérique dérivable sur
- \mathbb{R}
- ,
- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- tel que
- $a < b$
- et
- $y \in (f'(a), f'(b))$
- . On introduit les deux fonctions suivantes définies sur
- $[a, b]$
- :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \text{ et } \psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

- (a) Soit $z \in (f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$. Montrer qu'il existe $t \in [a, b]$ tel que $\varphi(t) = z$.
- (b) En déduire qu'il existe $u \in [a, b]$ tel que $\varphi(u) = y$ ou $\psi(u) = y$.
- (c) Montrer que f' vérifie le TVI.
- (d) Est-ce étonnant ?

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir avec des quantificateurs $\lim_{x \rightarrow 8563} (f(x)) = +\infty$ avec f une fonction numérique définie sur \mathbb{R}^+ .

Démonstration : Dérivée d'une réciproque.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^x - e}{\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$ puis évaluer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$

3. $f : x \mapsto x \ln(1+x),$

Exercice 2

On définit f la fonction suivante : $f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x - \ln(x)}{2} \end{cases}$ On note (E) l'équation suivante d'inconnue x réel strictement positif : $\ln(x) + x = 0$. (E)

1. Montrer que (E) admet une unique solution. Nous noterons α cette solution.

2. Dresser le tableau de variations de f .

3. Montrer alors que, pour tous réels x et y de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right) |x - y|$$

4. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Citer le théorème de minoration, majoration et d'encadrement.

Démonstration : Théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On prolonge f en posant $f(0) = 0$.

1. Prolonger f par continuité. On appelle encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0 et préciser sa position par rapport au graphe.
4. Factoriser f' afin d'en déduire le tableau de variations de f .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur I , intervalle de réels, et dérivables en a (avec $a \in I$). Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \right)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction suivante définie sur \mathbb{R}_+^* définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

- (a) Montrer que $f_n^{(n)}$ existe sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n.$$

- (b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \binom{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right)$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Expliquer ce qu'est le prolongement par continuité
Démonstration : Théorème des accroissements finis.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ et $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} sans y être de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

- 1.(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}.$$

- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \right)$.

2. Pour tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, (c, d) désignera le segment d'extrémités c et d . Soient f une fonction numérique dérivable sur \mathbb{R} , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $y \in (f'(a), f'(b))$. On introduit les deux fonctions suivantes définies sur $[a, b]$:

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

- (a) Soit $z \in (f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$. Montrer qu'il existe $t \in [a, b]$ tel que $\varphi(t) = z$.
- (b) En déduire qu'il existe $u \in [a, b]$ tel que $\varphi(u) = y$ ou $\psi(u) = y$.
- (c) Montrer que f' vérifie le TVI.
- (d) Est-ce étonnant ?

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir avec des quantificateurs $\lim_{x \rightarrow 8563} (f(x)) = +\infty$ avec f une fonction numérique définie sur \mathbb{R}^+ .

Démonstration : Dérivée d'une réciproque.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^x - e}{\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$ puis évaluer $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$

2. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$

3. $f : x \mapsto x \ln(1+x),$

Exercice 2

On définit f la fonction suivante : $f : \begin{cases}]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x - \ln(x)}{2} \end{cases}$ On note (E) l'équation suivante d'inconnue x réel strictement positif : $\ln(x) + x = 0$. (E)

1. Montrer que (E) admet une unique solution. Nous noterons α cette solution.

2. Dresser le tableau de variations de f .

3. Montrer alors que, pour tous réels x et y de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right) |x - y|$$

4. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Citer le théorème de minoration, majoration et d'encadrement.

Démonstration : Théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On prolonge f en posant $f(0) = 0$.

1. Prolonger f par continuité. On appelle encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0 et préciser sa position par rapport au graphe.
4. Factoriser f' afin d'en déduire le tableau de variations de f .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur I , intervalle de réels, et dérivables en a (avec $a \in I$). Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \right)$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction suivante définie sur \mathbb{R}_+^* définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

- (a) Montrer que $f_n^{(n)}$ existe sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n.$$

- (b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \binom{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right)$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Expliquer ce qu'est le prolongement par continuité
Démonstration : Théorème des accroissements finis.

Exercice 1

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \text{ et } g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
2. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} sans y être de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

- 1.(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}.$$

- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \right)$.

2. Pour tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, (c, d) désignera le segment d'extrémités c et d . Soient f une fonction numérique dérivable sur \mathbb{R} , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $y \in (f'(a), f'(b))$. On introduit les deux fonctions suivantes définies sur $[a, b]$:

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \text{ et } \psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

- (a) Soit $z \in (f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$. Montrer qu'il existe $t \in [a, b]$ tel que $\varphi(t) = z$.
- (b) En déduire qu'il existe $u \in [a, b]$ tel que $\varphi(u) = y$ ou $\psi(u) = y$.
- (c) Montrer que f' vérifie le TVI.
- (d) Est-ce étonnant ?