

EXERCICE 101 probabilités

Énoncé exercice 101

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A , B et C .

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
- (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

$$2. \text{ On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
- (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
- (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Remarque : aucune expression finalisée de a_n , b_n et c_n n'est demandée.

Corrigé exercice 101

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n).$$

$$\text{donc } a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \text{ c'est-à-dire } a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

- (b) De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.

$$(b) \ A + \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{rg} \left(A + \frac{1}{2}I_3 \right) = 1.$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \text{ est valeur propre de } A \text{ et } \dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2.$$

$$\text{L'expression de } A + \frac{1}{2}I_3 \text{ donne immédiatement que } E_{-\frac{1}{2}}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

- (c) Puisque $\text{tr}(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 1.
 A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.

$$\text{On en déduit que } \mathbb{R}^3 = E_{-\frac{1}{2}}(A)^\perp \oplus E_1(A), \text{ donc que } E_1(A) = \left(E_{-\frac{1}{2}}(A) \right)^\perp.$$

$$\text{Donc } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{En posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \text{ on a alors } D = P^{-1}AP.$$

$$3. \text{ D'après la question 1., } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Et donc on prouve par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } A = PDP^{-1} \text{ donc } A^n = PD^nP^{-1}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Or, d'après l'énoncé, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ donc :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 103 probabilités

Énoncé exercice 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

- (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .

Déterminer la loi de X .

Corrigé exercice 103

1. (a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^n ((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \text{ (union d'événements deux à deux disjoints).}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n P((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = n - k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

- (b) $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum_{m=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k)P(Y = m)$.

Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} \\
 &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Ainsi $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1 .
Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2 .
 (U_1, U_2) est un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$.
On a donc $p_1 = \frac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 $(B_n, \overline{B}_n)$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B}_n}(B_{n+1})P(\overline{B}_n)$.
Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation $l = -\frac{6}{35}l + \frac{4}{7}$ et on trouve $l = \frac{20}{41}$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - l$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.
On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
- (b) On obtient $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
 $E_3(A) = \text{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
- (c) $\text{rg} A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A .
Puisque $\text{tr} A = 3$ et que $\text{tr} A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
- (d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.
2. On note $e = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .
 A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.
 $E_3(f) = \text{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
Donc $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
 $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
On les normalise et on pose $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$.
Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.
On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f .

1. (a) Les vecteurs colonnes de la matrice A sont deux à deux orthogonaux et de norme 1, donc $A \in O(3)$.
Or (i, j, k) est une base orthonormée de E , donc $f \in O(E)$.

- (b) Pour déterminer les vecteurs invariants, on résout le système $AX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = X \iff (A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } AX = X \iff_{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{6}L_1} \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite $\Delta = \text{Vect}(i + j)$.

2. Comme $\dim \Delta = 1$, d'après les résultats sur la réduction d'une isométrie vectorielle en dimension 3, f est nécessairement une rotation.

On oriente l'axe Δ de cette rotation par le vecteur $i + j$.

Déterminons l'angle θ de la rotation f .
Comme la trace est invariante par changement de base, $1 + 2 \cos \theta = \text{tr} A$.
On en déduit que $\cos \theta = \frac{1}{2}$. (1)

Il reste donc à déterminer le signe de $\sin \theta$.

On pose $w = \frac{i + j}{\|i + j\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.

On a donc $\Delta = \text{Vect} w$ avec w unitaire.
Si u est un vecteur unitaire orthogonal à Δ , alors $\sin \theta = \text{Det}(u, f(u), w)$. Prenons par exemple $u = k$.

On a $f(u) = (\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2})$.

On calcule alors le déterminant :

$$\text{Det}(u, f(u), w) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c'est-à-dire $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{3} \bmod(2\pi)$.

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
Montrons que chaque colonne de A ne comporte qu'au plus un coefficient non nul.
Par l'absurde, supposons que la j -ème colonne de A possède au moins deux coefficients non nuls situés en k -ième et en ℓ -ième ligne. Puisque les colonnes de A sont orthogonales, on a pour tout $j' \neq j$

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} a_{i,j'} = 0$$

Sachant que tous les coefficients sont positifs, cette équation équivaut à

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} a_{i,j'} = 0$$

et on en tire

$$a_{k,j'} = a_{\ell,j'} = 0$$

Ainsi les $n - 1$ colonnes correspondant aux indices autres que j appartiennent à l'espace formé des colonnes dont les k -ième et ℓ -ième coefficients sont nuls. Or ces $n - 1$ colonnes sont indépendantes et cet espace est de dimension $n - 2$. C'est absurde.

Puisque les colonnes de A sont de norme 1 et que ses coefficients sont positifs, sur chaque colonne figure un 1 et $n - 1$ coefficients nuls.
Le même raisonnement peut être adapté aux lignes de A pour affirmer que chacune d'elles contient un coefficient 1 et $n - 1$ coefficients nuls.
Inversement, on vérifie aisément qu'une telle matrice est une matrice orthogonale à coefficients positifs.
En fait, les matrices considérés sont les matrices de permutation, il y en a $n!$

($\Rightarrow$) Si V est stable pour f alors $f(V) \subset V$ et puisque f est un automorphisme $f(V) = V$. Soient $x \in V^\perp$ et $y \in V$

$$(f(x) | y) = (x | f^{-1}(y)) = 0$$

car $f^{-1}(y) \in V$ donc $f(x) \in V^\perp$ puis $V^\perp$ stable par f .

($\Leftarrow$) Si $V^\perp$ stable par f alors $V = V^{\perp\perp}$ aussi

Soit λ valeur propre de f . Pour x vecteur propre, on a $f(x) = \lambda x$ avec $\|f(x)\| = \|x\|$ d'où $\lambda = \pm 1$. Une diagonalisation de f est alors réalisée avec des 1 et des -1 sur la diagonale, c'est une symétrie.

On a

$$A^7 = A^4 \times (A^t A) = A^{5t} A$$

puis

$$A^7 = A^3 \left({}^t A \right)^2 = A \left({}^t A \right)^3 = A^t \left(A^t A \right) = A^{2t} A = A^4$$

Ainsi $X^7 - X^4 = X^4(X^3 - 1)$ annule A .

Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\ker A^4 = \ker A$$

on pourra affirmer que le polynôme $X(X^3 - 1)$ annule aussi A et, ce dernier étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, cela sera décisif pour conclure.
Evidemment $\ker A \subset \ker A^4$. Inversement, soit $X \in \ker A^4$. On a

$$A^t A A X = A^4 X = 0$$

donc

$$\| {}^t A A X \|^2 = {}^t X^t A A^t A A X = 0$$

et par conséquent ${}^t A A X = 0$. Alors

$$\| A X \|^2 = {}^t X^t A A X = 0$$

et donc $A X = 0$. Ainsi $\ker A^4 \subset \ker A$ puis l'égalité.

- (a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x)g(x) \, \mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_0^1 f(x)G(x) \, \mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x)g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \left(G(1) - G(x) \right) \, \mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^*(g) : x \mapsto G(1) - G(x) = \int_x^1 g(t) \, \mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle$$

- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $(v^* \circ v)(f) = \lambda f$.

La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ v(f)(x) = -\lambda f'(x) \end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases} \lambda f(1) = 0 \\ \lambda f'(0) = 0 \\ f(x) = -\lambda f''(x) \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda > 0$ alors en écrivant $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$ donne la solution générale

$$y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

La condition $f'(0) = 0$ donne $\beta = 0$ et la condition $f(1) = 0$ donne $\alpha \cos(\omega) = 0$.

Si $\omega \notin \pi/2 + \pi\mathbb{N}$ alors $f = 0$ et $\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.

En revanche, si $\omega \in \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne

$\lambda = 1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x) = \cos(\omega x)$.

Si $\lambda < 0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f = 0$ et donc λ n'est pas valeur propre.