

MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 18 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Loi de Poisson : définition et fonction génératrice

Exercice 1

Banque CCINP : Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1.(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .

Déterminer la loi de X .

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

(a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières différentes.

(b) Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

2. Soit B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$B^3 = BB^T$$

Montrer que B est diagonalisable.

MP Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 18 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Loi géométrique : définition et fonction génératrice

Exercice 1

Banque CCINP : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A , B et C .

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A . Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet», B_n l'événement ... et C_n l'événement On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1.(a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

(b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

(b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

(c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. **Remarque :** le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n . **Remarque :** aucune expression finalisée de a_n , b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 2

Soit f un élément de $\mathcal{O}(E)$, E espace euclidien, et V un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que V est stable par f si et seulement si $V^\perp$ l'est.

2. On suppose uniquement dans cette question que f diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.

3. Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 18 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Fonction génératrice : définition, propriétés élémentaires ?

Exercice 1

Banque CCINP : On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .

2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

Exercice 2

On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par, pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Pour tout f dans E , on note F la primitive de f qui s'annule en 0 et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.

1. Déterminer l'adjoint v^* de v .

2. Que peut-on dire du signe des valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$?

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.