

MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Racine et divisibilité? Racine multiple et divisibilité?

Démonstration: $(PQ)'$ et $(P \circ Q)'$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.
2. Déterminer les racines du polynôme $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ en sachant qu'il y a une racine évidente multiple.
3. Déterminer le PGCD de $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Question indépendante : Factoriser $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser $X^n - 1$.
3. Factoriser $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$.
4. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Degré et opération (somme, produit, composée, dérivation) ?

Démonstration: Factorisation d'un polynôme ayant des racines distinctes et en déduire ce qu'on peut dire de P dans $\mathbb{K}_n[X]$ admettant $n + 1$ racines distinctes deux à deux.

Exercice 1

Soient $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ et $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$.

1. Montrer que P et Q ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de P , puis comme racine de Q .
2. Factoriser P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Q divise-t-il P ?
3. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

Exercice 2

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X) = XP'(X)$.
2. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X) = P(X + 1)$.
3. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $(X^2 + 1)P(X) = P(X^2)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$.
 - (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer qu'il existe une racine de P de module supérieur strictement supérieur à $|z|$.
 - (b) Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$.

MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Décomposition en facteurs irréductibles ?

Démonstration: Caractérisation de l'ordre des multiplicités des racines.

Exercice 1

1. Factoriser $1 + X + X^2 + X^3$ et $X^6 - 1$.
2. On suppose que P , un polynôme à coefficient réel, est périodique de période T avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Montrer que Q est le polynôme nul et en déduire que P est constant

Exercice 2

1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ tel que $P(X^2) = Q(X^2)$. Montrer que $P = Q$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme T -périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer que P est constant.
3. Trouver un polynôme P tel que $P(X + 1) - P(X) = X^2$.
4. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n i^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Reproduire cette méthode pour expliciter $\sum_{i=1}^n i^3, \sum_{i=1}^n i^4 \dots$

MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Citer diverses caractérisations du polynôme nul.

Démonstration : $(PQ)'$ et $(P \circ Q)'$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.
2. Déterminer les racines du polynôme $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ en sachant qu'il y a une racine évidente multiple.
3. Déterminer le PGCD de $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Question indépendante : Factoriser $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser $X^n - 1$.
3. Factoriser $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$.
4. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Formule de Taylor

Démonstration : Factorisation d'un polynôme ayant des racines distinctes et en déduire ce qu'on peut dire de P dans $\mathbb{K}_n[X]$ admettant $n + 1$ racines distinctes deux à deux.

Exercice 1

Soient $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ et $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$.

1. Montrer que P et Q ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de P , puis comme racine de Q .
2. Factoriser P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Q divise-t-il P ?
3. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

Exercice 2

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X) = XP'(X)$.
2. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X) = P(X + 1)$.
3. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $(X^2 + 1)P(X) = P(X^2)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$.
 - (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer qu'il existe une racine de P de module supérieur strictement supérieur à $|z|$.
 - (b) Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$.

MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Expliquer la décomposition en éléments simples.

Démonstration : Caractérisation de l'ordre des multiplicités des racines.

Exercice 1

1. Factoriser $1 + X + X^2 + X^3$ et $X^6 - 1$.
2. On suppose que P , un polynôme à coefficient réel, est périodique de période T avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Montrer que Q est le polynôme nul et en déduire que P est constant

Exercice 2

1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ tel que $P(X^2) = Q(X^2)$. Montrer que $P = Q$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme T -périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer que P est constant.
3. Trouver un polynôme P tel que $P(X + 1) - P(X) = X^2$.
4. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n i^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Reproduire cette méthode pour expliciter $\sum_{i=1}^n i^3, \sum_{i=1}^n i^4 \dots$

MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Citer diverses caractérisations du polynôme nul.

Démonstration : $(PQ)'$ et $(P \circ Q)'$ avec $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.
2. Déterminer les racines du polynôme $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ en sachant qu'il y a une racine évidente multiple.
3. Déterminer le PGCD de $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Question indépendante : Factoriser $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser $X^n - 1$.
3. Factoriser $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$.
4. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Formule de Taylor

Démonstration : Factorisation d'un polynôme ayant des racines distinctes et en déduire ce qu'on peut dire de P dans $\mathbb{K}_n[X]$ admettant $n + 1$ racines distinctes deux à deux.

Exercice 1

Soient $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$ et $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$.

1. Montrer que P et Q ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de P , puis comme racine de Q .
2. Factoriser P et Q dans $\mathbb{C}[X]$. Q divise-t-il P ?
3. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

Exercice 2

1. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X) = XP'(X)$.
2. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X) = P(X + 1)$.
3. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $(X^2 + 1)P(X) = P(X^2)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$.
 - (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer qu'il existe une racine de P de module supérieur strictement supérieur à $|z|$.
 - (b) Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant que : $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$.

MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Expliquer la décomposition en éléments simples.

Démonstration : Caractérisation de l'ordre des multiplicités des racines.

Exercice 1

1. Factoriser $1 + X + X^2 + X^3$ et $X^6 - 1$.
2. On suppose que P , un polynôme à coefficient réel, est périodique de période T avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Montrer que Q est le polynôme nul et en déduire que P est constant

Exercice 2

1. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ tel que $P(X^2) = Q(X^2)$. Montrer que $P = Q$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme T -périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer que P est constant.
3. Trouver un polynôme P tel que $P(X + 1) - P(X) = X^2$.
4. En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^n i^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Reproduire cette méthode pour expliciter $\sum_{i=1}^n i^3, \sum_{i=1}^n i^4 \dots$