

MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Citer le théorème de la division euclidienne.

Démonstration: Degré du produit de polynômes, majoration du degré de la somme de polynômes.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ (avec n un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de P et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ et $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$ sachant qu'ils possèdent une racine commune.
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^4 - 1}$.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré 2025 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2025 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2026)$. Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de Q .
2. Déterminer toutes les racines de Q .
3. Calculer $Q(-1)$.
4. En déduire la factorisation de Q .
5. Calculer $Q(2026)$ puis $P(2026)$.

MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition PPCM, PGCD, lien entre les deux ?

Démonstration: Unicité (en cas d'existence) de la division euclidienne.

Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$?
2. Déterminer le réel a pour que -1 soit racine double de $X^5 + aX^2 + aX + 1$.
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{X^2 + 3X + 1}{X^3 - 4X^2 + 5X - 2}$.

Exercice 2

On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes en posant $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant et la parité de T_n .
2. Déterminer la parité de T_n .
3. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire toutes les racines de T_n .
5. Trouver toutes les racines de T'_n .

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: relation de Bézout, couple de Bézout ?

Démonstration: Soit $(P, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$, montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \mid P.$$

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$P_n(X) = X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1 \quad \text{et} \quad A(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

2. En déduire que P_n est divisible par A .

3. Effectuer la division euclidienne de P_n est divisible par A .

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} a^{2(n-k)} (-1)^k b^{2k+1}.$$

2. On pose $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$. En déduire un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, P_n(\cotan^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}}.$$

3. Donner les racines de P_n .

4. En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Lien entre division euclidienne et PGCD.

Démonstration : Degré du produit de polynômes, majoration du degré de la somme de polynômes.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ (avec n un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de P et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ et $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$ sachant qu'ils possèdent une racine commune.
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^4 - 1}$.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré 2025 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2025 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2026)$. Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de Q .
2. Déterminer toutes les racines de Q .
3. Calculer $Q(-1)$.
4. En déduire la factorisation de Q .
5. Calculer $Q(2026)$ puis $P(2026)$.

MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Théorème D'Euclide et algorithme d'Euclide

Démonstration : Unicité (en cas d'existence) de la division euclidienne.

Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$?
2. Déterminer le réel a pour que -1 soit racine double de $X^5 + aX^2 + aX + 1$.
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{X^2 + 3X + 1}{X^3 - 4X^2 + 5X - 2}$.

Exercice 2

On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes en posant $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant et la parité de T_n .
2. Déterminer la parité de T_n .
3. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire toutes les racines de T_n .
5. Trouver toutes les racines de T'_n .

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Polynômes irréductibles : définition? Description dans $\mathbb{C}[X]$, Description dans $\mathbb{R}[X]$?

Démonstration : Soit $(P, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$, montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \mid P.$$

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$P_n(X) = X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1 \text{ et } A(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

2. En déduire que P_n est divisible par A .

3. Effectuer la division euclidienne de P_n est divisible par A .

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} a^{2(n-k)} (-1)^k b^{2k+1}.$$

2. On pose $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$. En déduire un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, P_n(\cotan^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}}.$$

3. Donner les racines de P_n .

4. En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Lien entre division euclidienne et PGCD.

Démonstration : Degré du produit de polynômes, majoration du degré de la somme de polynômes.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ (avec n un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de P et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ et $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$ sachant qu'ils possèdent une racine commune.
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^4 - 1}$.

Exercice 2

Soit P un polynôme de degré 2025 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2025 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2026)$. Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de Q .
2. Déterminer toutes les racines de Q .
3. Calculer $Q(-1)$.
4. En déduire la factorisation de Q .
5. Calculer $Q(2026)$ puis $P(2026)$.

MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Théorème D'Euclide et algorithme d'Euclide

Démonstration : Unicité (en cas d'existence) de la division euclidienne.

Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$?
2. Déterminer le réel a pour que -1 soit racine double de $X^5 + aX^2 + aX + 1$.
3. Décomposition en éléments simples de $\frac{X^2 + 3X + 1}{X^3 - 4X^2 + 5X - 2}$.

Exercice 2

On définit une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes en posant $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant et la parité de T_n .
2. Déterminer la parité de T_n .
3. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire toutes les racines de T_n .
5. Trouver toutes les racines de T'_n .

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Polynômes irréductibles : définition? Description dans $\mathbb{C}[X]$, Description dans $\mathbb{R}[X]$?

Démonstration : Soit $(P, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$, montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \mid P.$$

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$P_n(X) = X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1 \text{ et } A(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

2. En déduire que P_n est divisible par A .

3. Effectuer la division euclidienne de P_n est divisible par A .

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} a^{2(n-k)} (-1)^k b^{2k+1}.$$

2. On pose $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$. En déduire un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, P_n(\cotan^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}}.$$

3. Donner les racines de P_n .

4. En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.